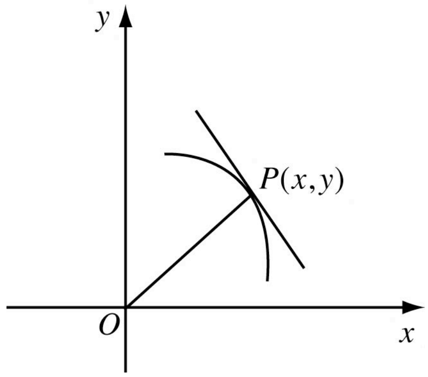
# 簡単な常微分方程式

## §　常微分方程式




$xy-$平面上のある曲線$\Gamma$の任意の点$P(x,y)$における接線と$OP$とが直交するという．このような曲線はどのようなものかを考えてみよう．これは次のように定式化される．

$\Gamma$を表す未知函数を$y(x)$とすると，題意から

☆　$\dfrac{y}{x}\cdot y'=-1$　（直交条件）

である．関係☆を満たす函数$y(x)$を求めることになる．関係式☆を**微分方程式**という．そしてこのような函数をその微分方程式の**解**という．解を求めることを微分方程式を**解く**という．実際☆は$2yy'=-2x$と表すことができる．更に$(y^2)'=-2x$とかける．したがって，$y^2=-x^2+r^2$ ($r$は任意の定数)，すなわち，

$$y^2+x^2=r^2$$

と表される．これは原点を中心とする円の群（族）を表している．

一般に，独立変数$x$と，$x$の函数$y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$との関係式：

$$※\qquad F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

を（$n$階の）**常微分方程式という．**関係式に偏導函数が含まれているとき**偏微分方程式**という．ここでは常微分方程式のみ扱うので，単に微分方程式ということにする．微分方程式※を満たす函数$y(x)$を微分方程式※の**解**という．そして解を求めることを微分方程式を**解く**という．一般に$n$階の微分方程式の解で，$n$個の任意定数$c_1,c_2,\cdots,c_n$（任意の値を指定できる．積分定数ともいう）を含んでいものを$y=y(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$と表したときこれを微分方程式の**一般解**という．特に，$n$個の定数$c_1,c_2,\cdots,c_n$にある特定の値を指定したときの解を**特殊解**という．方程式※の特殊解ではない解があったら，それを**特異解**という．たとえば函数:$y=cx-c^2$ ($c$は任意の定数)を考えてみよう．$y'=c$であるから，これを元の式に代入して$c$を消去すると，微分方程式：$y=xy'-y'^2$が得られる．$y=cx-c^2$はこの微分方程式の一般解である．他方 2 次函数$y=ax^2+bx+c$がこの微分方程式の解であるように$a,b,c$を決めよう．$y'=2ax+b$であるからこれを微分方程式に代入すると，

$$(4a^2-a)x^2+4abx+(b^2+c)\equiv 0$$

であることがわかる．$a=\dfrac{1}{4},b=c=0$をうる．すなわち 2 次函数$y=\dfrac{1}{4}x^2$も

微分方程式の解である．これは一般解で任意定数$c$をいかなる値に選んでも得ることができない解である． $y=\dfrac{1}{4}x^2$が特異解なのである．

微分方程式※を

条件：$y(x_0)=y_{0,0}\,,\,y'(x_0)=y_{1,0}\,,\,y''(x_0)=y_{2,0}\,,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1,0}$

を満たすように解を持つことがある．この条件を**初期条件**という．初期条件を満たす解を求める問題を**初期値問題**という．

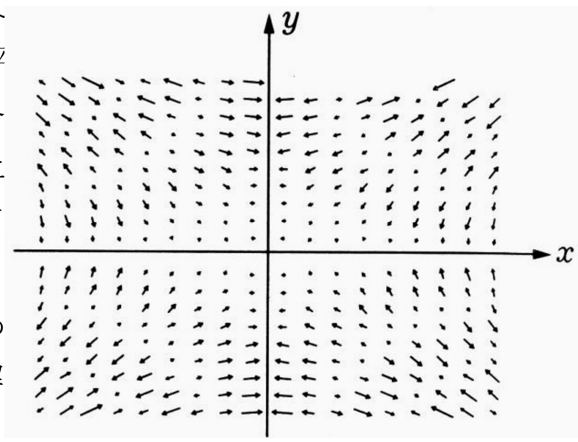
特に，次の形で表される微分方程式

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) \quad (\ n\geq 1\ )$$

を**正規形**という．

微分方程式の研究の目的と意義について若干考えてみよう．

(Ⅰ) 平面上の各点に方向ベクトルが与えられている（指定されている）とする．そのときの平面を**方向場**という．冒頭にあげた方向場は，各点で原点と結んだ線分と垂直な方向を指定した方向場である．ある与えられた方向場について各点での接線ベクトルがその指定された方向ベクトルと一致するような曲線族（群）を求めること，いわゆる微分方程式：$y'=f(x,y)$ を解く問題に帰着する．解として得られた曲線族をその方向場の**解曲線**という．流体力学，電磁気学，一般力学，ある種の社会現象の研究等は微分方程式や解の持つ特性に負うところが大きい．




(Ⅱ) 微分方程式を**解く**こと，いわゆる微分方程式のすべての解( 一般解，特異解（あれば） )を求めることは大きな課題である．微分方程式を解くには式の変形，変数変換，不定積分を何回か繰り返して解に到達する手法を**求積法**という．その場合，独立変数$x$，従属変数$y$の区別をせず，微分方程式を導函数の記号の含まない式にできたときに，微分方程式が解けたと見做すことにする．

(Ⅱ) 微分方程式の解の存在．実は微分方程式を解こうとしても一般には求積法では解けない場合が多い．そのような場合にはたして解が存在するのだろうかという疑問が当然ながら起こるであろう．それに答えるのが存在定理である．その定理を基にして解の持つ特性を研究するのがいわゆる微分方程式論なのである．解の存在が保証されていて，求積法で解けない場合には無限級数による

解法，数値解析による解法等がある．ラプラス変換とかフーリエ解析を使った扱い方もある．これは後期に応用数学・フーリエ解析の講義で解説する．

§　微分方程式をつくる

独立変数$x$，従属変数$y$（独立，従属の立場を入れ替えてもよい）と$n$個の任意定数$c_1,c_2,\cdots,c_n$との関係式：

$$G(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0\ \ (\ n\geq 1)$$

が与えられたとき，この式と$n$回順次微分（$y$を$x$の函数とみて，あるいは$x$を$y$の函数とみて）した式とから任意定数$c_1,c_2,\cdots,c_n$を消去して

関係式：$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

が得られる．この関係式が$G(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$を一般解に持つ微分方程式である．これを微分方程式の構成という．

例　任意定数$\alpha,\beta$を消去して，函数$y(x)$が満たす微分方程式を作れ．

(i) $y=\alpha+\dfrac{\beta}{x}$　　　(ii) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$

[解]　(i) 与式を$xy=\alpha x+\beta$と書き直す．両辺を2回微分する．$2y'+xy''=0$.

(ii) 両辺を2回微分する．$(x-\alpha)+(y-\beta)y'=0$, $1+(y')^2+(y-\beta)y''=0$.

$$\therefore y-\beta=-\frac{1+(y')^2}{y''},\ x-\alpha=-(y-\beta)y'=\frac{1+(y')^2}{y''}y'$$

これを与式に代入して，$a^2(y'')^2=\left(1+(y')^2\right)^2$をうる．

例　任意定数$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$を消去して，函数$y(x)$が満たす微分方程式を作れ．

(i) $y^2=4\alpha x$　　　(ii) $x^2+y^2=2\alpha x$

(iii) $y=\alpha\cos ax+\beta\sin ax$　　　(iv) $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$

(v) $y=\alpha x+\dfrac{\beta}{x}$　　　(vi) $\alpha y^2+\beta y=x$

[解] (i) $2yy'=4\alpha$でこれを与式に代入すると，$y^2=2yy'x$すなわち，$y=2y'x$

(ii) 両辺を微分して$2x+2yy'=2\alpha$. これを与式に代入する．$x^2+y^2=\left(2x+2yy'\right)x$すなわち，$y^2=x^2+2xy'$をうる．

(iii) 両辺を2回微分して，
$$\begin{cases}\alpha\cos ax+\beta\sin ax-y=0\\ -\alpha a\sin ax+\beta a\cos ax-y'=0\\ \alpha a^2\cos ax+\beta a^2\sin ax+y''=0\end{cases}$$

が得られる．ここから$\alpha,\beta$を消去する．

$$\begin{vmatrix} \cos ax & \sin ax & -y \\ -a\sin ax & a\cos ax & -y' \\ a^2\cos ax & a^2\sin ax & y'' \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を計算（1 行に$-a^2$をかけて 3 行に加える）して，$y'' + a^2 y = 0$ をうる．

(iv) 両辺を順次 3 回微分する．

$$\begin{cases} x + yy' + \alpha + \beta y' = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 1 + (y')^2 + yy'' + \beta y'' = 0 \quad \cdots\cdots(2) \\ 3y'y'' + yy''' + \beta y''' = 0 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(2),(3)から$\beta$を消去すると，$\left(1 + (y')^2\right) y''' - 3y'(y'')^2 = 0$ をうる．

注意：おれは$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\left\{1 + (y')^2\right\}^{3/2}}{y''}\right) = 0$ で，曲線の曲率半径が一定であることを意味する．

(v) $xy = \alpha x^2 + \beta$ としておいて，両辺を順次 2 回微分すると，

$y + xy' = 2\alpha x, 2y' + xy'' = 2\alpha$ で，ここから$\alpha$を消去して，$x^2 y'' + xy' - y = 0$．

(vi) 両辺を順次 2 回微分すると，

$$\begin{cases} \alpha y^2 + \beta y - x = 0 \\ 2\alpha yy' + \beta y' - 1 = 0 \\ \alpha(2y'^2 + 2yy'') + \beta y'' = 0 \end{cases}$$

ここから$\alpha, \beta$ を消去すると，

$$\begin{vmatrix} y^2 & y & -x \\ 2yy' & y' & -1 \\ 2y'^2 + 2yy'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore y^2 y'' + 2(y - xy')y'^2 = 0$$

例　$z = f(x^2 + y^2)$ で，$f$ を消去せよ．

[解]　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 + y^2)2x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 + y^2)2y$ であるから，$y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ をうる．

例　$y = (Ax + B)e^x + (Cx + D)e^{-x}$ が満たす微分方程式を求めよ．

[解]　$y', y'', y''', y^{(4)}$ を順次計算すると，

$$y = (Ax + B)e^x + (Cx + D)e^{-x}$$

$$y' = (Ax + A + B)e^x - (Cx + D - C)e^{-x}$$

$$y'' = (Ax + 2A + B)e^x + (Cx + D - 2C)e^{-x}$$

$$y''' = (Ax+3A+B)e^{x} - (Cx+D-3C)e^{-x}$$
$$y^{(4)} = (Ax+4A+B)e^{x} + (Cx+D-4C)e^{-x}$$

である．これらの式から，

$$\begin{cases} xe^{x}A + e^{x}B + xe^{-x}C + e^{-x}D - y = 0 \\ (x+1)e^{x}A + e^{x}B + (-x+1)e^{-x}C - e^{-x}D - y' = 0 \\ (x+2)e^{x}A + e^{x}B + (x-2)e^{-x}C + e^{-x}D - y'' = 0 \\ (x+3)e^{x}A + e^{x}B + (-x+3)e^{-x}C - e^{-x}D - y''' = 0 \\ (x+4)e^{x}A + e^{x}B + (x-4)e^{-x}C + e^{-x}D - y^{(4)} = 0 \end{cases}$$

ここから $A,B,C,D$ を消去すると，

$$\begin{vmatrix} xe^{x} & e^{x} & xe^{-x} & e^{-x} & -y \\ (x+1)e^{x} & e^{x} & (-x+1)e^{-x} & -e^{-x} & -y' \\ (x+2)e^{x} & e^{x} & (x-2)e^{-x} & e^{-x} & -y'' \\ (x+3)e^{x} & e^{x} & (-x+3)e^{-x} & -e^{-x} & -y''' \\ (x+4)e^{x} & e^{x} & (x-4)e^{-x} & e^{-x} & -y^{(4)} \end{vmatrix} = 0$$

で，この行列式を計算して $-16y^{(4)} + 32y'' - 16y = 0$ をうる．$i.e., y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ .

例　$z = f(y+ax) + g(y-ax)$ で，$f,g$ を消去せよ

[解] $\dfrac{\partial z}{\partial x} = af'(y+ax) - ag'(y-ax), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 f''(y+ax) + a^2 g''(y-ax)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(y+ax) + g'(y-ax), \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(y+ax) + g''(y-ax)$　$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

例　$z = f\left(\dfrac{y-bx}{x-ay}\right)$ で，$f$ を消去せよ．

[解] $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\dfrac{y-bx}{x-ay}\right)\dfrac{(ab-1)y}{(x-ay)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\dfrac{y-bx}{x-ay}\right)\dfrac{(1-ab)x}{(x-ay)^2}$ より，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

例　$z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ で，$f$ を消去せよ．

[解] $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{1}{x}$ より，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

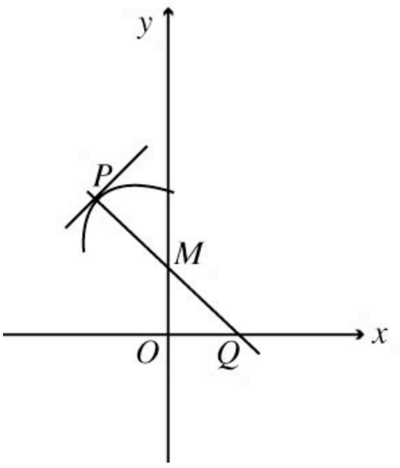
例　次の条件で決定される曲線族を微分方程式で記述せよ．

(i) $P(x,y)$ に於ける法線と $x$ 軸との交点 $Q$ と $P(x,y)$ を結ぶ線分が $y$ 軸によって二等分される．

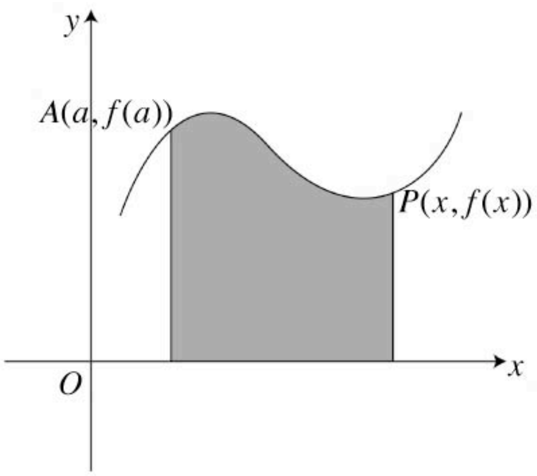
(ii)　曲線上の定点から任意の点までの部分弧の曲線下の面積が，その弧の長さ

の二倍である．（図参照）

[解




(i)




(ii)

(i) $P$ における法線は $Y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)+y$ と表される．$Q$ の座標は $\left(x+yy',0\right)$ である．$PQ$ の中点 $M\left(\dfrac{2x+yy'}{2},\dfrac{y}{2}\right)$ が $y$ 軸上にあるから，$2x+yy'=0$ が求めるものである．

(ii)　題意より，$\displaystyle\int_a^x ydx=2\int_a^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$．$\therefore\ y=2\sqrt{1+(y')^2}$ が求めるものである．

例　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$　$\left(ad-bc\neq 0\right)$ を一般解にもつ微分方程式を求めよ．

[解]　$y(cx+d)=ax+b$ にいて 3 回微分うる．$y'(cx+d)+cy=a$，$y''(cx+d)+2cy'=0$，$y'''(cx+d)+3cy''=0$ である．

$$y''(cx+d)=-2cy',\quad y'''(cx+d)=-3cy''$$

から，辺々割ると，$\dfrac{y''}{y'''}=\dfrac{2y'}{3y''}\Leftrightarrow 3(y'')^2=2y'y'''$

次のようにしてもよい．

$$y'=\frac{(ad-bc)}{(cx+d)^2},\ y''=-\frac{2(ad-bc)c}{(cx+d)^3},\ y'''=\frac{6(ad-bc)c^2}{(cx+d)^4}$$

$$\therefore\ 3y''^2-2y'y''=\frac{12(ad-bc)^2c^2}{(cx+d)^6}-\frac{12(ad-bc)}{(cx+d)^2}\cdot\frac{(ad-bc)c^2}{(cx+d)^4}=0$$