$$p=e^{\int\frac{dz}{z+1}}\left(C_1+\int(-1)\cdot e^{-\int\frac{dz}{z+1}}dz\right)=(z+1)\left(C_1-\int\frac{dz}{z+1}\right)=(z+1)\big(C_1-\log(z+1)\big)$$

$$i.e., \frac{dz}{dt}=(z+1)\big(C_1-\log(z+1)\big)\Leftrightarrow\int\frac{dz}{(z+1)\big(C_1-\log(z+1)\big)}=t+C_2$$

$$\therefore -\log\big(\log(z+1)-C_1\big)=\log C_2x$$

ここで，　任意定数の解釈から，上の式を $\log(z+1)-C_1=\dfrac{C_2}{x}$ と解釈する．

$$z+1=e^{\left(C_1+\frac{C_2}{x}\right)}\Leftrightarrow\frac{y}{x}=e^{\left(C_1+\frac{C_2}{x}\right)}-1\Leftrightarrow y=x\left(C_1e^{\frac{C_2}{x}}-1\right)\quad \text{（一般解）}$$

をうる．$p=0$ のとき，$z=C, i.e., y=Cx$ でこれは一般解に含まれる．

§　2階線形微分方程式

まず，微分方程式: $y''=f(y)$ について考えよう．このタイプの方程式はニュートンの運動方程式から現れる．質量 m の質点の運動は

$$m\cdot\alpha=f(y)\qquad\left(\ \alpha=\frac{d^2y}{dt^2}:\text{加速度}\ \right)$$

なる微分方程式で記述される．これを質点の運動方程式とかニュートンの運動方程式と呼ばれている．さて，

$$\text{微分方程式：}\ y''=f(y)$$

において，$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ であるから，$y''=f(y)$ は

$$p\frac{dp}{dy}=f(y)\Leftrightarrow\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}p^2\right)=f(y)$$

とかける．したがって，

$$\frac{1}{2}p^2=\int f(y)dy\Leftrightarrow p=\pm\sqrt{\int 2f(y)dy}$$

特に，

$$y''=my$$

とする．

(i)　$m>0$ のとき，

$$y'=\pm\sqrt{my^2+C_1}\Leftrightarrow y'=\pm\sqrt{m}\sqrt{y^2+\frac{C_1}{m}}$$

であるから，

$\dfrac{C_1}{m}=\alpha, \sqrt{m}=k$ よおくと， $\dfrac{1}{\sqrt{y^2+\alpha}}\dfrac{dy}{dx}=\pm k \Leftrightarrow \log\left|y+\sqrt{y^2+\alpha}\right|=\pm kx+C_2$.

$$\therefore y+\sqrt{y^2+\alpha}=\beta\cdot e^{\pm kx} \quad \left(\beta=\pm e^{C_2}\right) \text{-------------①}$$

①の両辺の逆数を計算すると，

$$y-\sqrt{y^2+\alpha}=\alpha\beta^{-1}e^{\mp kx} \text{--------------------------------②}$$

をうる．ただし，①,②で複合号順である．①＋②より，

一般解： $y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$ （c_1,c_2 は任意の定数）

をうる．

(ii) $m<0$ のとき， $y'=\pm\sqrt{-m\left(\dfrac{C_1}{(-m)}-y^2\right)}=\pm\sqrt{-m}\sqrt{\left(\dfrac{C_1}{(-m)}\right)-y^2}$ であるから，

$k=\sqrt{-m}, \alpha^2=\dfrac{C_1}{(-m)}$ とおくと，

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}\frac{dy}{dx}=\pm k \Leftrightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}=\pm kx+C_2 \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{y}{\alpha}\right)=\pm kx+C_2$$

$$\therefore \frac{y}{\alpha}=\sin(\pm kx+C_2) \Leftrightarrow y=(\pm\alpha\cos C_2)\sin kx+(\alpha\sin C_2)\cos kx$$

∴一般解： $y=c_1\sin\left(\sqrt{-m}\,x\right)+c_2\cos\left(\sqrt{-m}\,x\right)$ （c_1,c_2 は任意定数）をうる．

例　次の微分方程式を解け．

(i) $y''-4y=0$ (ii) $y''+5y=0$

[階](i) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ (ii) $y=c_1\sin\sqrt{5}x+c_2\cos\sqrt{5}x$

さて一般の線形微分方程式を扱う前に若干の準備をする．

n 個の函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ について，

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x) \quad (\ c_1,c_2,\cdots,c_n \text{ は定数 })$$

を $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ の **1 次結合**という．また，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が **1 次独立**であるとは，

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)\equiv 0$$

が成立するのは $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のときに限る場合をいう．1 次独立でないとき，**1 次従属**であるという．

たとえば，$1, \sin x, \cos x$ は 1 次独立である．それは次のようにして示される．

$c_1 \cdot 1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x \equiv 0$ として，順次 2 回微分して，c_1, c_2, c_3 を未知数とする次の連立 1 次方程式をうる．

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x \equiv 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cos x - c_3 \sin x \equiv 0 \\ c_1 \cdot 0 - c_2 \sin ax - c_3 \cos x \equiv 0 \end{cases}$$

そこで，係数行列式$=\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -1$ であるから，この連立 1 次方程式は自明な解のみをもつ．これは $1, \sin x, \cos x$ が 1 次独立であることを意味する．

また，$f_1(x) = 2x^2 + 5x - 23,\ f_2(x) = x^2 + 6x - 1,\ f_3(x) = x + 3$ は 1 次従属である．実際 $1 \cdot f_1(x) + (-2) f_2(x) + 7 f_3(x) \equiv 0$ である．

次に，一般に $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ の 1 次独立，1 次従属の判定について考えてみよう．

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \equiv 0$$

を順次 $n-1$ 回微分して，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ を未知数とする斉次方程式が得られる．

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \equiv 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) \equiv 0 \\ \qquad\vdots \\ c_1 f_1^{(\mathrm{n-1})}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases} \qquad \text{-------------------}\bigstar$$

この連立 1 次方程式の係数行列式を $W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right)$ とする．すなわち，

$$W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-1)}{}_1(x) & f^{(n-1)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-1)}{}_n(x) \end{vmatrix}$$

そして，これをを $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ の**ロンスキーの行列式(Wronskian)**とい

う．たとえば，

$$W(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \cdots, e^{\alpha_n x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \cdots & e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} & \cdots & \alpha_n e^{\alpha_n x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1{}^{n-1} e^{\alpha_1 x} & \alpha_2{}^{n-1} e^{\alpha_2 x} & \cdots & \alpha_n{}^{n-1} e^{\alpha_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\left(x\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1{}^{n-1} & \alpha_2{}^{n-1} & \cdots & \alpha_n{}^{n-1} \end{vmatrix} = e^{\left(x\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)} \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

ここにあらわれた行列式は **Vandermonde の行列式**と呼ばれている．

さて，$W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right) \neq 0$ のとき，斉次方程式★は自明な解のみをもつから $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ は 1 次独立である．上にあげた例で，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が相異なる値のときには，$e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \cdots, e^{\alpha_n x}$ が 1 次独立である．

例　次のことを示せ．

(i)　$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$ は 1 次独立である．

(ii)　$e^x \cos x, e^x \sin x$ は 1 次独立である．

(iii)　$1, x, x^2, \cdots, x^n$ は 1 次独立である．

[解]

(i)　$$W(e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \alpha & 1 + \alpha x \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \neq 0$$

(ii)　$$W(e^x \cos x, e^x \sin x) = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\cos x + \sin x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

(iii)　$$W(1, x, x^2, \cdots, x^n) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & n(n-1)x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} k! \neq 0$$

$W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right) \neq 0$ ならば，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が 1 次独立であることは上述した通りであるが逆は必ずしも成立しない．その例をあげておこう．

たとえば，函数 $f_1(x), f_2(x)$ を次のように定義する．

$$f_1(x)=\begin{cases} x^3 & (x<0) \\ 0 & (x\geq 0) \end{cases},\ f_2(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

$c\,f_1(x)=f_2(x)$ または $f_1(x)=c'\,f_2(x)$ であるような定数 c,c' を選ぶことができないから， $f_1(x), f_2(x)$ は 1 次独立である

$$W(f_1(x), f_2(x))=\begin{cases} \begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} & (x<0) \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} & (x\geq 0) \end{cases}$$ であるから， $W(f_1(x), f_2(x))\equiv 0$

以上のことから， $W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right)\neq 0$ は $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が 1 次独立で

あるための十分条件であることがわかる．

定理　斉次の n 階線形微分方程式：

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+p_{n-2}(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_0(x)y=0 \text{ ----------------※}$$

の n 個の解の組: $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ について，

$$\frac{d}{dx}W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))+p_{n-1}(x)W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))=0$$

が成立する．そして，

$$W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))=C\cdot\exp\left(-\int p_{n-1}(x)dx\right)$$

[証明] 行列式の導函数の公式により，

$$\frac{d}{dx}W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right)=\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-1)}{}_1(x) & f^{(n-1)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-1)}{}_n(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-1)}{}_1(x) & f^{(n-1)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-1)}{}_n(x) \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-1)}{}_1(x) & f^{(n-1)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-1)}{}_n(x) \\ f^{(n-1)}{}_1(x) & f^{(n-1)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-1)}{}_n(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-2)}{}_1(x) & f^{(n-2)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-2)}{}_n(x) \\ f^{(n)}{}_1(x) & f^{(n)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n)}{}_n(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-2)}{}_1(x) & f^{(n-2)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-2)}{}_n(x) \\ f^{(n)}{}_1(x) & f^{(n)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n)}{}_n(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-2)}{}_1(x) & f^{(n-2)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-2)}{}_n(x) \\ -\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) f_1^{(k)}(x) & -\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) f_2^{(k)}(x) & \cdots & -\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) f_n^{(k)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= -p_{n-1}(x) W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right) - \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n-2)}{}_1(x) & f^{(n-2)}{}_2(x) & \cdots & f^{(n-2)}{}_n(x) \\ f_1^{(k)}(x) & f_2^{(k)}(x) & \cdots & f_n^{(k)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= -p_{n-1}(x) W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right)$$

$$\frac{\left(W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))\right)'}{W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))} = -p_{n-1}(x)$$

から明らかである.

注意:今のことから，$W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \equiv 0$ か $W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \neq 0$ のどちらかのみが成立することがわかる．そしてこの場合，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $W\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right) \neq 0$ であることがわかる.

注意：2 つの函数 $f_1(x), f_2(x)$ について，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{\left\{f_2(x)\right\}^2} = \frac{1}{\left\{f_2(x)\right\}^2} W(f_1(x), f_2(x))$$

であるから，$f_1(x), f_2(x)$ が１次従属であることは，比 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ が定数になることであることがわかる．

※の n 個の１次独立な解の組 $\left\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right\}$ が定まって，※の任意の解は

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \quad \left(c_1, c_2, \cdots, c_n \text{ は任意定数} \right)$$

の形で表すことができることが知られている．$\left\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right\}$ を※の基本解の系と呼ばれている．また，非斉次方程式：

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + p_{n-2}(x) y^{(n-2)} + \cdots + p_0(x) y = q(x) \text{ ----------------※※}$$

の１つの特殊解を $\varphi(x)$ とすると，※※の一般解は

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) + \varphi(x)$$

の形に表すことができる. さて, ※※の特殊解をどのようにして求めるかを考えてみよう．

話を分かりやすくするために 2 階線形微分方程式；

$$\begin{cases} y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)} \\ y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = q(x) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)} \end{cases}$$

を考察する．(i) の基本解の系を $\left\{f_1(x), f_2(x)\right\}$ とすると，(i) の一般解は

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

とかける．ここで，$c_1 = u_1(x), c_2 = u_2(x)$ を適当に定めて，

$$y = u_1(x) f_1(x) + u_2(x) f_2(x)$$

が (ii) の特殊解になるようにする．

$$y' = \left(u_1'(x) f_1(x) + u_2'(x) f_2(x)\right) + u_1(x) f_1'(x) + u_2(x) f_2'(x)$$

であるが，更に，条件を設けることにする．

$$u_1'(x) f_1(x) + u_2'(x) f_2(x) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

$$\therefore y'' = u_1'(x) f_1'(x) + u_2'(x) f_2'(x) + u_1(x) f_1''(x) + u_2(x) f_2''(x)$$

これを(ii)に代入すると,

$$\left\{u_1'(x)f_1'(x)+u_2'(x)f_2'(x)+u_1(x)f_1''(x)+u_2(x)f_2''(x)\right\}$$

$$+p_1(x)\left\{u_1(x)f_1'(x)+u_2(x)f_2'(x)\right\}+p_0(x)\left\{u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)\right\}=q(x)$$

$$u_1(x)\left\{f_1''(x)+p_1(x)f_1'(x)+p_0(x)f_1(x)\right\}+u_2(x)\left\{f_2''(x)+p_1(x)f_2'(x)+p_0(x)f_2(x)\right\}$$

$$+u_1'(x)f_1'(x)+u_2'(x)f_2'(x)=q(x)$$

$f_1(x), f_2(x)$ が(i)の解であるから，この式は

$$u_1'(x)f_1'(x)+u_2'(x)f_2'(x)=q(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$$

となる．(iii),(iv)からクラーメルの公式を使って,

$$u_1'(x)=\frac{-f_2(x)q(x)}{W(f_1(x),f_2(x))},\quad u_2'(x)=\frac{f_1(x)q(x)}{W(f_1(x),f_2(x))}$$

をうる．

$$\therefore u_1(x)=-\int\frac{f_2(x)q(x)}{W(f_1(x),f_2(x))}dx,\quad u_2(x)=\int\frac{f_1(x)q(x)}{W(f_1(x),f_2(x))}dx$$

したがって，(ii)の一般解は

$$y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\left(-\int\frac{f_2(x)q(x)}{W(f_1(x),f_2(x))}dx\right)f_1(x)+\left(\int\frac{f_1(x)q(x)}{W(f_1(x),f_2(x))}dx\right)f_2(x)$$

と表される．このような特殊解の求め方をラグランジュの**定数変化法**という．

例　$y''+m^2y=A\sin ax \quad (m>0, a>0)$ を解け．

［解］$y''+m^2y=0$ の基本解の系は $\sin mx, \cos mx$ であることすでに示した．

そして，$W(\sin mx, \cos mx)=-m$ であるから，一般解は

$$y=c_1\sin mx+c_2\cos mx+\varphi(x)$$

ここで，$\varphi(x)=\left(A\int\frac{\cos mx\sin ax}{m}dx\right)\sin mx+\left(-A\int\frac{\sin mx\sin ax}{m}dx\right)\cos mx$

である．

$$\cos mx\sin ax=\frac{1}{2}\left\{\sin(m+a)x-\sin(m-a)x\right\}$$

$$\sin mx\sin ax=-\frac{1}{2}\left\{\cos(m+a)x-\cos(m-a)x\right\}$$

であることに注意しておく.

$m \neq a$ のとき,

$$\int \cos mx \sin ax dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{-\cos(m+a)}{m+a} + \frac{\cos(m-a)}{m-a}\right\}$$

$$\int \sin mx \sin ax dx = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(m+a)}{m+a} - \frac{\sin(m-a)}{m-a}\right\}$$

であるから, $\varphi(x) =$

$$\frac{A}{2m}\left[\left\{\frac{-\cos(m+a)x}{m+a} + \frac{\cos(m-a)x}{m-a}\right\}\sin mx + \left\{\frac{\sin(m+a)x}{m+a} - \frac{\sin(m-a)x}{m-a}\right\}\cos mx\right]$$

$$= \frac{A}{2m}\left\{\frac{\sin(m+a)x\cos mx - \cos(m+a)\sin mx}{m+a} + \frac{\sin mx\cos(m-a)x - \cos mx\sin(m-a)x}{m-a}\right\}$$

$$= \frac{A}{2m}\left(\frac{\sin ax}{m+a} + \frac{\sin ax}{m-a}\right) = \frac{A\sin ax}{m^2-a^2}$$

$$\therefore \text{一般解}: y = c_1 \sin mx + c_2 \cos mx + \frac{A\sin ax}{m^2-a^2} \text{ をうる.}$$

$m = a$ のとき,

$$\int \cos mx \sin ax dx = \int \frac{1}{2}\sin 2mdx = -\frac{1}{4m}\cos 2mx$$

$$\int \sin mx \sin ax dx = \int \sin^2 mx dx = \int \frac{1-\cos 2mx}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4m}\sin 2mx$$

であるから,

$$\varphi(x) = \frac{A}{m}\left(-\frac{1}{4m}\cos 2mx\right)\sin mx - \frac{A}{m}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4m}\sin 2mx\right)\cos mx = -\frac{A}{2m}x\cos mx$$

$$\therefore \text{一般解}: y = c_1 \sin mx + c_2 \cos mx - \frac{A}{2m}x\cos mx \text{ をうる.}$$

次に斉次方程式(i)の1つの解 $\varphi(x)$ を既知として, それを基に非斉次方程式(ii)の一般解をもとめよう. 任意定数 c について, $c\varphi(x)$ も(i)の解である. そこで, c として x の函数 $c = u(x)$ をうまくとって, $u(x)\varphi(x)$ が(ii)の解になるように決めたい. すなわち,

$$\{u(x)\varphi(x)\}'' + p_1(x)\{u(x)\varphi(x)\}' + p_0(x)u(x)\varphi(x) = q(x)$$

が成立するようにしたい.

$$\left\{\varphi''(x) + p_1(x)\varphi'(x) + p_0(x)\varphi(x)\right\}u(x) + \varphi(x)u'' + \left\{2\varphi'(x) + p_1(x)\varphi(x)\right\}u'(x) = q(x)$$

$$\therefore \varphi(x)u'' + \left\{2\varphi'(x) + p_1(x)\varphi(x)\right\}u'(x) = q(x)$$

$u'(x) = \lambda(x)$ おくと,

$$\lambda'(x) + \frac{2\varphi'(x) + p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}\lambda(x) = \frac{q(x)}{\varphi(x)}$$

となる. これは 1 階線形であるから,

$$\lambda(x) = \exp\left(-\int \frac{2\varphi'(x) + p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}dx\right)\left(C_1 + \int q(x)\exp\left(\int \frac{2\varphi'(x) + p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}dx\right)dx\right)$$

$\therefore u(x) = \int \lambda(x)dx + C_2$ で, 一般解は $y = u(x)\varphi(x)$ （ C_1, C_2 は任意の定数 ）

と表される.

例　次の微分方程式をとけ.

(i)　$x^2y'' - xy' + y = x^2$　　(ii)　$x^2y'' - 5xy' + 8y = x^3$

[解]　$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$ をとく. そして, $\varphi(x) = x$ は明らかに $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ の解である. そして,

$\frac{2\varphi'(x) + p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x}\left(2 + \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x\right) = \frac{1}{x}$, $\frac{q(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x}$ であるから, $\lambda' + \frac{1}{x}\lambda = \frac{1}{x}$ を解けばよい.

$$\therefore \lambda(x) = \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right)\left(C_1 + \int \frac{1}{x}\exp\left(\int \frac{dx}{x}\right)dx\right) = \frac{C_1}{x} + 1,$$

$$u(x) = \int \lambda(x)dx = \int\left(\frac{C_1}{x} + 1\right)dx = C_1\log|x| + x + C_2$$

$\therefore$ 一般解: $y = C_1x\log|x| + x^2 + C_2x$ （ C_1, C_2 は任意の定数 ）

(ii) $\varphi(x) = x^n$ が $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$ の解であるように n をきめよう. $\varphi(x) = x^n$ この方程式に代入してみると, $\left\{n(n-1) - 5n + 8\right\}x^n \equiv 0$. $\therefore n = 2,4$ である.

与式 $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = x$ とかいておいて, $\varphi(x) = x^2$ が $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$ の特殊解となる.

$$\frac{2\varphi'(x)+p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{x^2}\left(4x+\left(-\frac{5}{x}\right)\cdot x^2\right)=\frac{-1}{x},\ \frac{q(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{x}$$

であるから，

$$\lambda'-\frac{1}{x}\lambda=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\lambda=e^{\int\frac{dx}{x}}\left(C_1+\int\frac{1}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right)=x\left(C_1-\frac{1}{x}\right)=-1+C_1x$$

$\therefore u=\int\left(-1+C_1x\right)dx=-x+\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2$ で，$y=u(x)x^2=-x^3+C_1x^4+C_2x^2$ が一般解.

注意：上の計算で $\varphi_1=x^2,\varphi_2=x^4$ が $y''-\dfrac{5}{x}y'+\dfrac{8}{x^2}y=0$ の解で，実は φ_1,φ_2 は明らかに 1 次独立である．$\psi(x)=ax^3$ として与式に代入すると，$a=-1$ のとき，(ii)の解（特殊解）になっている．∴(ii)の一般解は $y=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\psi=c_1x^2+c_2x^4-x^3$ の形で表されることはすでに学んでいる.

例　$p(x)y''-xy'+y=0$ は $\varphi(x)=x$ を特殊解としてもつことを示せ．このことを用いて $x^2y''-(x+2)xy'+(x+2)y=x^4e^x$ を解け.

［解］　$p(x)\varphi''-x\varphi''+\varphi=p(x)\cdot 0-x\cdot 1+x=0$ である．$\varphi(x)=x$ は

$$\frac{x^2}{x+2}y''-xy'+y=0$$

の特殊解である．そこで，

$$y''-\frac{x+2}{x}y'+\frac{x+2}{x^2}y=x^3e^x$$

を解けばよい.

$$\frac{2\varphi'(x)+p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{x}\left(2-\frac{x+2}{x}\cdot x\right)=\frac{-x}{x}=-1,\ \frac{q(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^3e^x}{x}=x^2e^x$$

$$\therefore\lambda'-\lambda=x^2e^x\Leftrightarrow\lambda=e^x\left(C_1+\int x^2dx\right)=C_1e^x+\frac{1}{3}x^3$$

$$\therefore u=\int\left(C_1e^x+\frac{1}{3}x^3\right)dx=C_1e^x+\frac{1}{12}x^4+C_2$$

一般解 $y=u(x)\varphi(x)=C_1xe^x+C_2x+\dfrac{x^5}{12}$ が得られる.

例　　微分方程式：$p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$

において，$p_2(x)+p_1(x)+p_0(x)=0$ なら，$\varphi(x)=e^x$ を特殊解としてもつことを示せ．これを利用して，$(x+1)y''-(x+2)y'+y=2(x+1)^2e^{2x}$ を解け.

［解］ $p_2(x)(e^x)'' + p_1(x)(e^x)' + p_0(x)e^x = \left(p_2(x) + p_1(x) + p_0(x)\right)e^x = 0$.

$(x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0$ において，$\{(x+1)\} + \{-(x+2)\} + 1 = 0$ であるから，この斉次方程式は $\varphi(x) = e^x$ を特殊解にもつ．原方程式を

$$y'' - \frac{x+2}{x+1}y' + \frac{1}{x+1}y = 2(x+1)e^{2x}$$

と書き直す．

$$\frac{2\varphi'(x) + p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{e^x}\left(2e^x + \left(-\frac{x+2}{x+1}\right)\cdot e^x\right) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{q(x)}{\varphi(x)} = \frac{2(x+1)e^{2x}}{e^x} = 2(x+1)e^x$$

であるから，$\lambda' + \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)\lambda = 2(x+1)e^x$ を解けばよい．

$$\therefore \lambda = \exp\left(-\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx\right)\left(C_1 + \int 2(x+1)e^x \exp\left(\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx\right)dx\right)$$

$$\lambda = (x+1)e^{-x}\left(C_1 + 2\int e^{2x}dx\right) = C_1(x+1)e^{-x} + (x+1)e^x$$

$$\therefore u(x) = \int\left(C_1(x+1)e^{-x} + (x+1)e^x\right)dx = C_1(x+2)e^{-x} + xe^x + C_2$$

ゆえに求める一般解は $y = u(x)\varphi(x) = C_1(x+2) + C_2e^x + xe^{2x}$ である．

§　定数係数線形微分方程式

ここで若干の準備的な事柄として，複素指数関数の解説をする．本格的には複素函数論を学ぶ必要があるが，ここでは天下り的にお話をすすめる．

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\ i = \sqrt{-1}\ )$$

とする．

$$f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = i\,f(\theta)$$

$$\therefore \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = i \Leftrightarrow \log f(\theta) = i\theta + c \Leftrightarrow f(\theta) = Ce^{i\theta} \quad （C は任意定数）$$

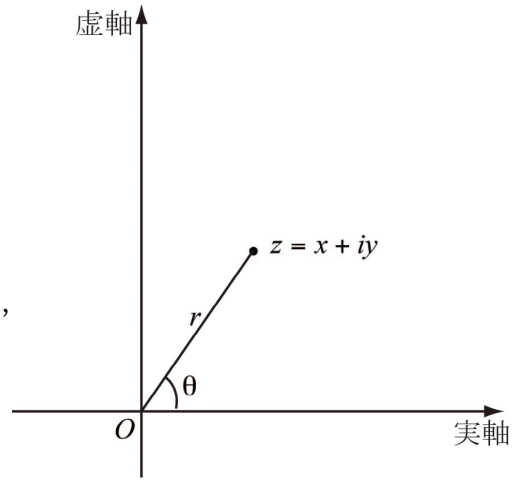
そこで，$f(0) = 1$ であるから，$C = 1$ をうる．すなわち，$\therefore f(\theta) = e^{i\theta}$ である．

公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

が得られた．これはオイラー（Euler）の公式と呼ばれている．

$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1, \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

である． たとえば，



$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, e^{i\pi} = -1, e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$$

である．複素数 z について，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とし，

$\overrightarrow{Oz}$ と実数軸とのなす角を θ とすると，

$$z = re^{i\theta}$$

と表示できる． θ を複素数 z の偏角という．たとえば，

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, -1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, 1 - \sqrt{3}i = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

のような表示をする． 次のような計算もできる．

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^3 = \left(e^{i\theta}\right)^3 = e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$\therefore (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

3 倍角の公式: $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

がえられる．同様に何倍角の公式でも作ることができる．

また，

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

より，$\cos x, \sin x$ の級数展開

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots, \sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

も容易に得られる. 複素数$\alpha = a + ib$について,

$$\left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x}, \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \quad (\alpha \neq 0)$$

が成立する.

例　不定積分$\int e^{ax} \cos bx dx, \int e^{ax} \sin bx dx$を求めよ.

[解]　$\int e^{ax} \cos bx dx + i \int e^{ax} \sin bx dx = \int e^{ax} \left(\cos bx + i \sin bx\right) dx$

$$= \int e^{ax} e^{ibx} dx = \int e^{(a+ib)x} dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \frac{(a-ib)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{e^{ax}\{(a\cos bx + b\sin bx) + i(-b\cos bx + a\sin bx)\}}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}, \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx)}{a^2 + b^2}$$

線形微分方程式: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + p_0 y = q(x)$
において, $p_{n-1}, p_{n-2}, \cdots, p_0$が定数のときこの方程式を定数係数の線形微分方程式という. ここでは定数係数を扱う. 特に, 斉次方程式

☆　$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + p_0 y = 0$

を考察する.

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + p_0$$

とする. この多項式を定数係数線形微分方程式☆の**特性多項式**という.
いま, $y = e^{\alpha x}$を☆に代入すると, その左辺は$\varphi(\alpha)e^{\alpha x}$であることがわかる. したがって, で$e^{\alpha x}$が☆の解であるためには$\varphi(\alpha) = 0$であることがわかる. すなわち, 代数方程式$\varphi(\lambda) = 0$の解$\alpha$について　$e^{\alpha x}$は微分方程式☆の解であることがわかる. $\varphi(\lambda) = 0$を☆の**特性方程式**という. まず,

※　$y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$

を考えよう.　特性多項式は

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

である. $\varphi(\lambda) = 0$の解のあり方によって3つの場合がある.

(I)　$\varphi(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$ で，α_1,α_2 が相異なる実数の場合

$e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x}$ は※の解であり，$W(e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x})=\alpha_2-\alpha_1\neq 0$ であるから 1 次独立である.

すなわち，$\{e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x}\}$ が基本解の系で※の一般解は

$$y=c_1e^{\alpha_1 x}+c_2e^{\alpha_2 x}\quad（c_1,c_2 \text{は任意定数}）$$

(II)　$\varphi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^2$ の場合

$e^{\alpha x}$ が※の解であることはすでに示している. もう1つの解を $y=u(x)e^{\alpha x}$ とすると,

$$y'=u'e^{\alpha x}+\alpha ue^{\alpha x},\ y''=(u''+2\alpha u'+\alpha^2 u)e^{\alpha x}$$

を※ に代入すると,

$$(\alpha^2+p_1\alpha+p_2)u(x)e^{\alpha x}+\left\{u''+(2\alpha+p_1)u'\right\}=0$$

である. ところで，α は $\lambda^2+p_1\lambda+p_2=0$ の重複解であるから，$2\alpha+p_1=0$ である.

$\therefore u''=0$. このことから，$xe^{\alpha x}$ は ※の解であることがわかる. そして,

$$W(e^{\alpha x},xe^{\alpha x})=\begin{vmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x}+\alpha xe^{\alpha x}\end{vmatrix}=e^{2\alpha x}\neq 0$$

であるから，$\{e^{\alpha x},xe^{\alpha x}\}$ が基本解の系であり，一般解は

$$y=c_1e^{\alpha x}+c_2xe^{\alpha x}\quad（c_1,c_2 \text{は任意定数}）$$

(III)　$\varphi(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\bar{\alpha})$ で，α は複素数の場合

複素数 $\alpha=a+bi$ とすると，共役複素数 $\bar{\alpha}=a-bi$ である. そこで,

$\psi_1=e^{\alpha x}=e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx),\psi_2=e^{\bar{\alpha}x}=e^{(a-bi)x}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)$

は※の解であり,

$$\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)=e^{ax}\cos bx,\ \frac{1}{2i}(\psi_1-\psi_2)=e^{ax}\sin bx$$

も解である. そして,

$$W\left(e^{ax}\cos bx,e^{ax}\sin bx\right)=\begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ e^{ax}\left(a\cos bx-b\sin bx\right) & e^{ax}\left(a\sin bx+b\cos bx\right)\end{vmatrix}=be^{2ax}\neq 0$$

であるから，$\left\{e^{ax}\cos bx,e^{ax}\sin bx\right\}$ が基本解の系であり，一般解は

$$y=c_1e^{ax}\cos bx+c_2e^{ax}\sin bx\qquad（c_1,c_2 \text{は任意定数}）$$

例　次の微分方程式を解け．

(i)　$y''+5y'-14y=0$　　(ii)　$y''+8y'+16y=0$　　(iii)　$y''+2y'+5y=0$

[解] (i) 特性等定式は$\varphi(\lambda)=\lambda^2+5\lambda-14=(\lambda+7)(\lambda-2)$であるから，一般解は

$$y=c_1e^{-7x}+c_2e^{2x}\ （c_1,c_2\text{は任意定数}）$$

(ii) 特性等定式は$\varphi(\lambda)=\lambda^2+8\lambda+16=(\lambda+4)^2$であるから，一般解は

$$y=c_1e^{-4x}+c_2xe^{-4x}\ （c_1,c_2\text{は任意定数}）$$

(iii) 特性等定式は$\varphi(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+5=(\lambda+1+2i)(\lambda+1-2i)$であるから，一般解は

$$y=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\sin 2x\quad （c_1,c_2\text{は任意定数}）$$

例　次の微分方程式を解け．

(i)　$y''+5y'+6y=12$　　(ii)　$y''+3y'+2y=\cos 2x$

[解]　(i)　$y''+5y'+6y=0$の一般解は$c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}$であることは明白．$\varphi(x)=e^{-x}$としてラグランジュの定数変化法を使って，この方程式を解く．

$$\frac{2\varphi'(x)+p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}=\frac{-4e^{-2x}+5e^{-2x}}{e^{-2x}}=1,\frac{q(x)}{\varphi(x)}=\frac{12}{e^{-2x}}=12e^{2x}$$

より，

$$\lambda'+\lambda=12e^{2x}\Leftrightarrow\lambda=e^{-x}\left(c_1+\int 12e^{2x}e^xdx\right)=c_1e^{-x}+4e^{2x},\therefore u=-c_1e^{-x}+2e^{2x}+c$$

$\therefore$一般解$y=u\cdot\varphi(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+2$をうる．

(ii)　$y''+3y'+2y=0$の一般解は$c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$であることは明白．$\varphi=e^{-2x}$として，

$$\frac{2\varphi'(x)+p_1(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}=\frac{-2e^{-x}+3e^{-x}}{e^{-x}}=1,\frac{q(x)}{\varphi(x)}=e^x\cos 2x$$

$$\lambda'+\lambda=e^x\cos 2x\Leftrightarrow\lambda=e^{-x}\left(c_1+\int e^x\cos 2xe^xdx\right)=c_1e^{-x}+\frac{e^x}{4}(\cos 2x+\sin 2x)$$

$$y=e^{-2x}\left\{\int\left(-c_1e^{-x}+\frac{e^x}{4}(\cos 2x+\sin 2x)\right)dx+c_2\right\}=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{20}\cos 2x+\frac{3}{20}sin2x$$

が一般解である．

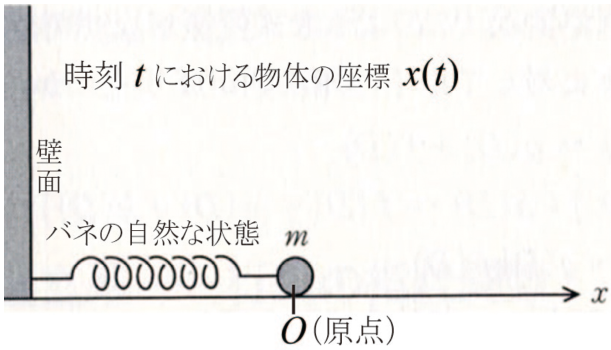
注意:(i) 特殊解を$\varphi(x)=ax+b$とすると，$a=0,b=2$であることがすぐ分かる．

(ii) $\varphi=a\cos 2x+bsin2x$として，φが解であるように定数a,bを決める．

原方程式に代入して$(-2a+6b-1)\cos 2x+(-6a-2b)\sin 2x\equiv 0$で，$a=-\dfrac{1}{20},b=\dfrac{3}{20}$

を得る．一般解: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-\dfrac{1}{20}\cos 2x+\dfrac{3}{20}sin2x$が得られる．

例　水平な床の上ある物体（質量 m とする）を図のように床に垂直に立つ壁面にバネで繋がれているとする．時刻 t における物体の座標を $x(t)$ とする．$x(0)$ はバネの自然な状態（伸び，縮みのない状態）で原点にあるとする．



このとき，次の微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x-\mu m\mathrm{g}\frac{dx}{dt}$$

が成立することが物理学的に知られている．これは**バネの運動方程式**と呼ばれている．ここで，g は重力の加速度で，μ は物体と床との摩擦係数，k はバネ係数と呼ばれている．式を簡単化するため，$a=\dfrac{\mu \mathrm{g}}{2},b=\dfrac{k^2}{m}$ とおくことにする．微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+bx=0 \quad (a,b\text{は定数})$$

とかける．特性方程式は

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2+2a\lambda+b=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$$

である．そのとき，この微分方程式の一般解は

$$x=c_1e^{\alpha_1 t}+ce^{\alpha_2 t} \qquad (\alpha_1,\alpha_2\text{は相異なる実数})$$

$$x=\left(c_1+c_2t\right)e^{\alpha t} \qquad (\alpha_1=\alpha_2=\alpha)$$

$$x=c_1e^{\xi t}\cos\eta t+c_2e^{\xi t}\sin\eta t \qquad (\alpha_1=\xi+i\eta,\alpha_2=\xi-i\eta)$$

次に

3 階の定数係数の線形微分方程式: $y'''+p_2y''+p_1y'+p_0y=0$

を考えよう．特性多項式は

$$\varphi(\lambda)=\lambda^3+p_2\lambda^2+p_1\lambda+p_0$$

である．そのとき，次のような分類が考えられる．

(I)　$\varphi(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)$ で，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ が相異なる実数の場合

$W\left(e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x},e^{\alpha_3 x}\right)=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)\neq 0$ であるから，$\left\{e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x},e^{\alpha_3 x}\right\}$ が基本解の系で，一般解は

$$y=c_1e^{\alpha_1 x}+c_2e^{\alpha_2 x}+c_3e^{\alpha_3 x} \quad (c_1,c_2,c_3\text{は任意定数})$$

(II)　$\varphi(\lambda)=(\lambda-\alpha)^3$ の場合．

微分方程式は $y''' - 3\alpha y'' + 3\alpha^2 y' - \alpha^3 y = 0$ とかける．そこで，$\psi(x) = x^n e^{\alpha x}$ がこの微分方程式の解になるように n を決めよう．$\psi(x)$ を方程式に代入すると，$n(n-1)(n-2)x^{n-3}e^{\alpha x} \equiv 0$ をうる．$\therefore n = 0,1,2$ をうる．すなわち，$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}$ が解である．そして，$W(e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}) = 2e^{3\alpha x} \neq 0$ であるから，$\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}\}$ が基本解の系で，一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} + c_3 x^2 e^{\alpha x} \quad （c_1, c_2, c_3 \text{は任意定数}）$$

(III) $\varphi(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^2(\lambda - \alpha_2)$ で，α_1, α_2 は相異なる実数の場合

微分方程式は $y''' - (2\alpha_1 + \alpha_2)y'' + (\alpha_1{}^2 + 2\alpha_1\alpha_2)y' - \alpha_1{}^2\alpha_2 y = 0$ とかける．

$\psi(x) = x^n e^{\alpha_1 x}$ が解になるように n を決める．そこで，$\psi(x)$ を方程式に代入する

$n(n-1)(n-2+\alpha_1 x - \alpha_2)x^{n-3}e^{\alpha_1 x} \equiv 0$ をうる．$\therefore n = 0,1$．すなわち，$e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}$

が解で，$W(\{e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}\}) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{(2\alpha_1 + \alpha_2)x} \neq 0$　であるから，$\{e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}\}$ が

基本解の系で，一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_2 x} \quad （c_1, c_2, c_3 \text{は任意定数}）$$

(IV) $\varphi(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \bar{\alpha}_1)(\lambda - \alpha_3)$ で，α_1 は複素数の場合

$\alpha = a + bi$ とすると，$e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, e^{\alpha_2 x}$ は我々の微分方程式の解で，

$$W(e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, e^{\alpha_2 x}) = b\left\{b^2 + (a - \alpha_2)^2\right\}e^{(2a+\alpha_2)x} \neq 0$$

であるから，$\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, e^{\alpha_2 x}\}$ が基本解の系で，一般解は

$$y = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx + c_3 e^{\alpha_2 x} \quad （c_1, c_2, c_3 \text{は任意定数}）$$

例　次の微分方程式を解け．

(i) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$　(ii) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

(iii) $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$

[解] (i) $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ であるから，

一般解：$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$　（c_1, c_2, c_3 は任意定数）

(ii)　$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 9 = (\lambda - 2)^3$ であるから，

一般解：$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$　（c_1, c_2, c_3 は任意定数）

(iii)　$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = (\lambda - 1)\{\lambda - (1+2i)\}\{\lambda - (1-2i)\}$

$\therefore$ 一般解：$y = c_1 e^x + e^x(c_2\cos 2x + c_3 \sin 2x)$　（c_1, c_2, c_3 は任意定数）

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p(x)y = 0 \text{-------------------}★$$

の基本解の系 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ がわっているとき，非同次方程式

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p(x)y = q(x) \text{-----------------}★★$$

の特殊解を求めよう．

★の一般解は

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) \qquad (c_1, c_2, c_3 \text{は任意定数})$$

と表される．ここで，x の函数 $c_1 = u_1(x), c_2 = u_2(x), c_3 = u_3(x)$ をうまくとって，

$$y = u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) + u_3(x)f_3(x)$$

が★★の解になるようにしたい．

$$y' = u_1'(x)f_1(x) + u_2'(x)f_2(x) + u_3'(x)f_3(x) + u_1(x)f_1'(x) + u_2(x)f_2'(x) + u_3(x)f_3'(x)$$

いま，

$$u_1'(x)f_1(x) + u_2'(x)f_2(x) + u_3'(x)f_3(x) = 0 \text{-----------------}(1)$$

としておく．

$$y'' = u_1'(x)f_1'(x) + u_2'(x)f_2'(x) + u_3'(x)f_3'(x) + u_1(x)f_1''(x) + u_2(x)f_2''(x) + u_3(x)f_3''(x)$$

更に，

$$u_1'(x)f_1'(x) + u_2'(x)f_2'(x) + u_3'(x)f_3'(x) = 0 \text{-----------------}(2)$$

としておく．

$$y''' = u_1'(x)f_1''(x) + u_2'(x)f_2''(x) + u_3'(x)f_3''(x) + u_1(x)f_1'''(x) + u_2(x)f_2'''(x) + u_3(x)f_3'''(x)$$

である．そこで，これを★★に代入すると，

$$u_1'(x)f_1''(x) + u_2'(x)f_2''(x) + u_3'(x)f_3''(x) + \sum_{i=1}^{3} u_i \left(f_i''' + p_2 f_i'' + p_1 f_i' + p_0 f_i \right) = q(x)$$

である．ところで，f_1, f_2, f_3 は★の解であるから

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \left(f_i''' + p_2 f_i'' + p_1 f_i' + p_0 f_i \right) = 0$$

$$\therefore u_1'(x)f_1''(x) + u_2'(x)f_2''(x) + u_3'(x)f_3''(x) = q(x) \text{--------------------}(3)$$

(1),(2),(3)を u_1', u_2', u_3' に関する連立 1 次方程式と考えると，クラーメルの公式より

$$u_1' = \frac{q(x)(f_2 f_3' - f_3 f_2')}{W(f_1, f_2, f_3)}, u_2' = \frac{-q(x)(f_1 f_3' - f_3 f_1')}{W(f_1, f_2, f_3)}, u_3' = \frac{q(x)(f_1 f_2' - f_2 f_1')}{W(f_1, f_2, f_3)}.$$

$$\therefore y = \left(\int \frac{q(x)(f_2 f_3' - f_3 f_2')}{W(f_1, f_2, f_3)} dx \right) f_1 + \left(-\int \frac{q(x)(f_1 f_3' - f_3 f_1')}{W(f_1, f_2, f_3)} dx \right) f_2 + \left(\int \frac{q(x)(f_1 f_2' - f_2 f_1')}{W(f_1, f_2, f_3)} dx \right) f_3$$

が★★の求める特殊解である．

例　$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = xe^{4x}$ を解け．

[解]　$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ の特性多項式は

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

で，e^x, e^{2x}, e^{3x} が $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ の基本解の系であることがわかる．そして，$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = 2e^{6x}$ 上記の公式を使うと，

$$u_1' = \frac{xe^{4x}e^{5x}}{2e^{6x}} = \frac{1}{2}xe^{3x}, u_2' = \frac{-xe^{4x}\cdot 2e^{4x}}{2e^{6x}} = -xe^{2x}, u_3' = \frac{xe^{4x}e^{3x}}{2e^{6x}} = \frac{1}{2}xe^{x}$$

∴原方程式の特殊解は

$$\left(\frac{1}{18}(-1+3x)e^{3x}\right)e^x + \left(-\frac{1}{4}(-1+2x)e^{2x}\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}(-1+x)e^{x}\right)e^{3x} = \frac{-11+6x}{36}e^{4x}$$

∴原方程式の一般解：$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \dfrac{-11+6x}{36}e^{4x}$　(c_1, c_2, c_3 は任意定数)

をうる．

注意：この場合，$y_{sp} = (ax+b)e^{4x}$ として，原方程式に代入すると，

$\{6ax + (11a+6b)\}e^{4x} \equiv xe^{4x}$，∴ $a = \dfrac{1}{6}, b = -\dfrac{11}{36}$ をうる．

一般に，定数係数 n 階線形微分方程式

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + p_0y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ★$$

について，λ について n 次の多項式

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + p_0\lambda$$

を微分方程式★の特性多項式という．そして，方程式 $\varphi(\lambda) = 0$ を微分方程式★の**特性方程式**という．$\varphi(\lambda)$ を因数分解すると，次のような場合が考えられる．

(i)　$\varphi(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)^{m_1}(\lambda-\alpha_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\alpha_r)^{m_r}$　($\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ は実数, $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$)

と因数分解されたとき

$$e^{\alpha_1x}, xe^{\alpha_1x}, \cdots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1x}, e^{\alpha_2x}, xe^{\alpha_2x}, \cdots, x^{m_2-1}e^{\alpha_2x}, \cdots, e^{\alpha_rx}, xe^{\alpha_rx}, \cdots, x^{m_r-1}e^{\alpha_rx}$$

が基本階の系である．そして，一般解は

$$y = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_1} c_{i,j}x^{j-1}e^{\alpha_ix}$$

と表される．

(ii)　$\varphi(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)^{m_1}(\lambda-\alpha_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\alpha_l)^{m_l}(\lambda-\beta_1)^{n_1}(\lambda-\overline{\beta}_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\beta_k)^{n_k}(\lambda-\overline{\beta}_k)^{n_k}$

（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ は実数，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ は複素数，$\sum_{i=1}^{l} m_i + \sum_{j=1}^{k} 2n_j = n, m_i, n_j \geq 0$）

と因数分解されたとき，$\beta_j = a_j + ib_j \ (j=1,2,\cdots,k)$ とすると，

$$e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, \cdots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, xe^{\alpha_2 x}, \cdots, x^{m_2-1}e^{\alpha_2 x}, \cdots, e^{\alpha_l x}, xe^{\alpha_l x}, \cdots, x^{m_l-1}e^{\alpha_l x}$$

$$e^{a_1 x}\cos b_1 x, e^{a_1 x}\sin b_1 x, xe^{a_1 x}\cos b_1 x, xe^{a_1 x}\sin b_1 x, \cdots, x^{n_1-1}e^{a_1 x}\cos b_1 x, x^{n_1-1}e^{a_1 x}\sin b_1 x,$$

$$\cdots, e^{a_l x}\cos b_l x, e^{a_l x}\sin b_l x, xe^{a_l x}\cos b_l x, xe^{a_l x}\sin b_l x, \cdots, x^{n_k-1}e^{a_l x}\cos b_l x, x^{n_k-1}e^{a_l x}\sin b_l x,$$

が基本階の系である．一般解は

$$y = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} x^{j-1} e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x^{j-1} e^{a_i x}(d_{i,j}\cos b_i x + h_{i,j}\sin b_i x)$$

と表される．

例　次の定数係数の線形微分方程式を解け．

(i)　$y^{(5)} - 3y^{(4)} - 3y''' + 9y'' + 2y' - 6y = 0$

(ii)　$y^{(6)} - y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y''' + 5y'' - y' - 2y = 0$

(iii)　$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 17y^{(4)} - 28y''' + 28y'' - 16y' + 4y = 0$

[解](i) $\varphi(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^4 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 6 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})(\lambda-3)$

であるから，一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3e^{-\sqrt{2}x} + c_4e^{\sqrt{2}x} + c_5e^{3x}$ である．

(ii) $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2)$ であるから，一般解は次のようである．

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + c_4x^2e^{-x} + c_5e^{x} + c_6xe^{x}$$

(iii) $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda+2)^2 = (\lambda-1)^2\left\{(\lambda-(1-i)\right\}^2\left\{\lambda-(1+i)\right\}^2$

であるから，一般解は次のようである．

$$y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + e^{x}\left(c_3\cos x + c_4\sin x\right) + xe^{x}\left(c_5\cos x + c_6\sin x\right)$$

§　演算子法

とおく． $D^0[y] = y, \dfrac{d^k y}{dx^k} = D^k[y]$ ($k \geq 1$), $D^0[y] = y, \dfrac{d^k y}{dx^k} = D^k[y]$ ($k \geq 1$) を意味する．

$$\varphi(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

とする．

$$\varphi(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0D^0 = a_n\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0\frac{d^0}{dx^0}$$

で，函数 $y(x)$ について，線形写像 $\varphi(D): y \to \varphi(D)[y]$

$$\varphi(D)[y] = a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1\frac{dy}{dx} + p_0 y$$

と定義する．たとえば，$\varphi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ とすると，

$$ay'' + by' + cy = aD^2(y) + bD(y) + cy = \varphi(D)[y]$$

である．

$$\varphi(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
$$\psi(\lambda) = b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$$

について，

$$\left(\varphi(D) \pm \psi(D)\right)[y] = \varphi(D)[y] \pm \psi(D)[y] \quad \text{（復号同順）}$$

が成立することは明らかである．また，

$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{d^m y}{dx^m}\right) = \dfrac{d^m}{dx^m}\left(\dfrac{d^n y}{dx^n}\right) = \dfrac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}$，すなわち，$D^nD^m = D^mD^n = D^{m+n}$ である．

ことから

$$\left(\varphi(D)\psi(D)\right)[y] = \varphi(D)\left[\psi(D)[y]\right] = \psi(D)\left[\varphi(D)[y]\right]$$

が成立する．たとえば，

$\varphi(\lambda) = \lambda - \alpha, \psi(\lambda) = \lambda - \beta$ とすると，$\varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta$ で，

$$\varphi(D)\left[\psi(D)[y]\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - \beta y\right) - \alpha\left(\frac{dy}{dx} - \beta y\right)$$
$$= \frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha+\beta)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = \left(\varphi(D)\psi(D)\right)[y]$$

$$\varphi(D)[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + p_1y' + p_0y$$

とすると，

微分方程式：$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + p_1y' + p_0y = q(x)$

は

$$\varphi(D)[y] = q(x)$$

と表される．$\varphi(D)$ を**微分演算子**という．また微分方程式の解を

$$y = \varphi(D)^{-1}[q(x)]$$

のように表される．たとえば，

$$(D-\alpha)[y] = q(x) \Leftrightarrow y' - \alpha y = q(x)$$

であるから，

$$y = (D-\alpha)^{-1}[q(x)] \Leftrightarrow y = e^{\alpha x}\left(C + \int q(x)e^{-\alpha x}dx\right)$$

のようにかける．次に，

$$(D-\alpha)^m[y] = q(x) \text{-----------------------------}☆$$

を満たす函数 $y = (D-\alpha)^{-m}[q(x)]$ を求めることを考えよう．

$D[ye^{-\alpha x}] = D[y]e^{-\alpha x} - \alpha ye^{-\alpha x} = (D-\alpha)[y]e^{-\alpha x}$

$D^2[ye^{-\alpha x}] = D^2[y]e^{-\alpha x} - \alpha D[y]e^{-\alpha x} - \alpha D[y]e^{-\alpha x} + \alpha^2 ye^{-\alpha x} = (D-\alpha)^2[y]e^{-\alpha x}$

$\vdots$

$D^m[ye^{-\alpha x}] = (D-\alpha)^m[y]e^{-\alpha x}$

であることがわかる．このとこから， $e^{\alpha x}D^m[ye^{-\alpha x}] = (D-\alpha)^m[y] = q(x)$ で，

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(ye^{-\alpha x}\right) = e^{-\alpha x}q(x)$$

をうる．従って，

$$ye^{-\alpha x} = \overbrace{\int\cdots\int}^{m} e^{-\alpha x}q(x)\overbrace{dx\cdots dx}^{m} + (c_0 + c_1x + \cdots + c_{m-1}x^{m-1})$$

$\therefore$☆の一般解は $y = e^{\alpha x}\left(\overbrace{\int\cdots\int}^{m} e^{-\alpha x}q(x)\overbrace{dx\cdots dx}^{m} + (c_0 + c_1x + \cdots + c_{m-1}x^{m-1})\right)$

である．これは

$$y = e^{\alpha x}\overbrace{\int\cdots\int}^{m} e^{-\alpha x}q(x)\overbrace{dx\cdots dx}^{m} + (c_0 + c_1x + \cdots + c_{m-1}x^{m-1})e^{\alpha x}$$

とかける．上の積分は $e^{-\alpha x}q(x)$ を m 回不定積分することを意味する

$(c_0 + c_1x + \cdots + c_{m-1}x^{m-1})e^{\alpha x}$ は $(D-\alpha)^m[y] = 0$ の一般解で，$e^{\alpha x}\overbrace{\int\cdots\int}^{m} e^{-\alpha x}q(x)\overbrace{dx\cdots dx}^{m}$

は $(D-\alpha)^m[y] = q(x)$ の特殊解である．特殊解を求めることが課題である．

例　次の微分方程式を解け．

(i)　$y'' - 2y + y = xe^x$,

(ii)　$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = x$

[解] (i)　$y = (D-1)^{-2}[xe^x] = e^x\left(\int\int e^{-x}(xe^x)dxdx + c_0 + c_1x\right) = e^x\left(\dfrac{x^3}{6} + c_0 + c_1x\right)$

(ii)　$(D-2)^3[y] = x$, $y = e^{2x}\left(\int\int\int e^{-2x}x\,dxdxdx + c_0 + c_1x + c_2x^2\right)$

$$\int e^{-2x}x\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2}x + \int\frac{e^{-2x}}{2}dx = -\frac{1+2x}{4}e^{-2x}$$

$$\int -\frac{1+2x}{4}e^{-2x}dx = \frac{e^{-2x}}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) + \int\frac{-e^{-2x}}{2}\frac{1}{2}dx = \frac{1+x}{4}e^{-2x}$$

$$\int \frac{1+x}{4}e^{-2x} = -\frac{3+2x}{16}e^{-2x}\ .\ \therefore y = -\frac{3+2x}{16} + (c_0 + c_1x + c_2x^2)e^{2x}$$

注意：$y_{sp} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ として，これを方程式に代入して未定係数法で a,b,c,d を決める方法もある．ちなみに，$a = 0, b = 0, c = -\frac{1}{8}, d = -\frac{3}{16}$ をうる．

再び

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + p_1y' + p_0y = q(x) \text{-----------------------}\bigstar$$

を考察する．$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + p_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + p_1y' + p_0y = 0$ の特性多項式 $\varphi(\lambda)$ が

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)^{m_1}(\lambda-\alpha_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\alpha_k)^{m_k}$$

と因数分解されたとき，

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-\alpha_1)^{m_1}(\lambda-\alpha_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\alpha_k)^{m_k}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\alpha_{i,j}}{(\lambda-\alpha_i)^j}$$

と部分分数に展開されて，★の一般解は

$$y = \varphi(D)^{-1}[q(x)] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\alpha_{i,j}}{(D-\alpha_i)^j}[q(x)]$$

と表すことができる..

例　　次の微分方程式を解け

(i)　$y'' - 4y' + 3y = xe^x$

(ii)　$y^{(4)} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = x^2e^x$

(iii)　$y'' + y = \sin x$

(iv)　$y'' + y = \cos x$

(v)　$y'' + y = \sin x + \cos x$

(vi)　$y''' - 2y'' - y' + 2y = \sin x$

[解](i)　$y = \dfrac{1}{(D-3)(D-1)}[xe^x] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{D-3} - \dfrac{1}{D-1}\right)[xe^x]$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{3x}\left(\int e^{-3x}(xe^x)dx + c_0\right) - e^x\left(\int e^{-x}(xe^x)dx + c_0{}'\right)\right\} = -\frac{2x^2+2x+1}{8}e^x + c_0e^{3x} + c_0{}'e^x$$

注意：$y = \dfrac{1}{(D-3)(D-1)}[xe^x] = \dfrac{1}{D-3}\left[\dfrac{1}{D-1}[xe^x]\right] = \dfrac{1}{D-3}\left[e^x\left(\int e^{-x}(xe^x)dx + c_1\right)\right]$

$$= \frac{1}{D-3}\left[e^x\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)\right] = e^{3x}\left(\int e^{-3x}\left(e^x\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)\right) + c_2\right)$$

$$= -\frac{2x^2+2x+1}{8}e^x + c_1e^x + c_2e^{3x}$$

としてもよい.

(ii)　$\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$ であるから,

$c_1e^{2x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^x$ が $y^{(4)} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$ の一般解である.

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{1}{\lambda-2} - \frac{1}{(\lambda-1)} - \frac{1}{(\lambda-1)^2} - \frac{1}{(\lambda-1)^3}$$

$$y = \varphi(D)^{-1}[x^2e^x] = (D-2)^{-1}[x^2e^x] - (D-1)^{-1}[x^2e^x] - (D-1)^{-2}[x^2e^x] - (D-1)^{-3}[x^2e^x]$$

$$(D-2)^{-1}[x^2e^x] = e^{2x}\int e^{-2x}(x^2e^x)dx = -(x^2+2x+2)e^x$$

は $y^{(4)} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$ 一般解の中に含まれる.

$$(D-1)^{-1}[x^2e^x] = e^x\left(\int e^{-x}(x^2e^x)dx\right) = \frac{x^3}{3}e^x$$

$$(D-1)^{-2}[x^2e^x] = e^x\left(\int\int e^{-x}(x^2e^x)dxdx\right) = \frac{x^4}{12}e^x$$

$$(D-1)^{-3}[x^2e^x] = e^x\left(\int\int\int e^{-x}(x^2e^x)dxdxdx\right) = \frac{x^5}{60}e^x$$

$y = -\dfrac{e^x}{60}(x^5 + 5x^4 + 20x^3) + c_0e^{2x} + (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x$ が求める一般解である.

(iii)　$y = \dfrac{1}{(D^2+1)}[\sin x] = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{D-i} - \dfrac{1}{D+i}\right)[\sin x] = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{D-i}[\sin x] - \dfrac{1}{D+i}[\sin x]\right)$

$$\frac{1}{D-i}[\sin x] = e^{ix}\left(\int e^{-ix}\sin x dx + c_1\right) = e^{ix}\left(\int e^{-ix}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx + c_1\right) = -\frac{e^{-ix}}{4} - \frac{ixe^{ix}}{2} + c_1e^{ix}$$

$$\frac{1}{D+i}[\sin x] = e^{-ix}\left(\int e^{ix}\sin x dx + c_2\right) = e^{-ix}\left(\int e^{ix}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx + c_2\right) = -\frac{e^{ix}}{4} + \frac{ixe^{ix}}{2} + c_2e^{-ix}$$

$-\dfrac{e^{\pm ix}}{4}$ は $(D^2+1)[y] = 0$ の一般解に含まれるから,

$y = -\dfrac{1}{2i}\dfrac{ix(e^{ix}+e^{-ix})}{2} + c_1e^{ix} + c_2e^{-ix} = -\dfrac{x\cos x}{2} + c_1'\cos x + c_2'\sin x$ が求める一般解.

(iv)　(iii)と同様に,　$y = \dfrac{x\sin x}{2} + c_1\cos x + c_2\sin x$

(v)　(iii)・(iv)から,　$y = \dfrac{x(\sin x - \cos x)}{2} + c_1\cos x + c_2\sin x$

(vi) $\varphi(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2), \dfrac{1}{\varphi(\lambda)}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{\lambda+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\lambda-1}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\lambda-2}$

$$y=\varphi(D)^{-1}[\sin x]=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{D+1}[\sin x]-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D-1}[\sin x]+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{D-2}[\sin x]$$

$$\frac{1}{D+1}[\sin x]=e^{-x}\left(\int e^{x}\sin x dx+c_1\right)=\frac{-\cos x+\sin x}{2}+c_1e^{-x}$$

$$\frac{1}{D-1}[\sin x]=e^{x}\left(\int e^{-x}\sin x dx+c_1\right)=-\frac{\cos x+\sin x}{2}+c_2e^{x}$$

$$\frac{1}{D-2}[\sin x]=e^{2x}\left(\int e^{-2x}\sin x dx+c_1\right)=-\frac{\cos x+2\sin x}{5}+c_3e^{2x}$$

$$\therefore y=\frac{2\sin x+\cos x}{10}+c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}$$

例（*Euler* の微分方程式）

微分方程式： $x^n\dfrac{d^ny}{dx^n}+x^{n-1}a_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+x^{n-2}a_2\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+xa_{n-1}\dfrac{d\ y}{dx}+a_ny=q(x)$

（ここで， $a_1,a_2,\cdots,a_n$ は定数）

を考察する．これをオイラー型の微分方程式という．変数変換 $x=e^t$ により定数係数の方程式に帰着させる．

$$D=\frac{d}{dx},\Delta=\frac{d}{dt},D^k=\frac{d^k}{dx^k},\Delta^k=\frac{d^k}{dt^k}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

とする．そのとき，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}e^t=x\frac{dy}{dx}\Leftrightarrow xD[y]=\Delta[y]$$

$$\frac{d^2y}{d\,t^2}=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}\Leftrightarrow x^2D^2[y]+xD[y]=\Delta^2[y]$$

$$\Leftrightarrow x^2D^2[y]+\Delta[y]=\Delta^2[y]\Leftrightarrow x^2D^2[y]=\Delta(\Delta-1)[y]$$

$$\frac{d^3y}{d\,t^3}=\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt}=\left(2x\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$=x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=x^3D^3[y]+3x^2D^2[y]+xD[y]$$

$$\Updownarrow$$

$$x^3D^3[y]=(\Delta^3-3\Delta(\Delta-1)-\Delta)[y]=\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)[y]$$

$$\vdots$$

$$x^k D^k[y] = \Delta(\Delta-1)(\Delta-2)(\Delta-3)\cdots(\Delta-k+1)[y] \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

であることがわかる．そこで，与式を演算子Δで表すと，

$$\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)(\Delta-3)\cdots(\Delta-n+1)[y] + a_1\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)(\Delta-3)\cdots(\Delta-n+2)[y]$$
$$+\cdots+a_{n-1}\Delta[y]+a_n y = q(x)$$

すなわち，定数係数の線形微分方程式

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + b_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}\frac{d\ y}{dt} + b_n y = q(x)$$

に帰着する．

例　次の微分方程式を解け．

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 10xy' - 12y = x^2 \log x$$

[解]　$\big(\Delta(\Delta-1)(\Delta-2) - 4\Delta(\Delta-1) + 10\Delta - 12\big)[y] = te^{2t} \Leftrightarrow (\Delta-3)(\Delta-2)^2[y] = te^{2t}$

$$\therefore y = \frac{1}{(\Delta-3)(\Delta-2)^2}\left[te^{2t}\right] = \left(\frac{1}{\Delta-3} - \frac{1}{\Delta-2} - \frac{1}{(\Delta-2)^2}\right)\left[te^{2t}\right]$$

$(\Delta-3)(\Delta-2)^2[y]=0$ の一般解は $c_1e^{3t}+c_2e^{2t}+c_3te^{2t}$ で，$(\Delta-3)(\Delta-2)^2[y]=te^{2t}$ の特殊解を見つければよい．そこで，

$\dfrac{1}{\Delta-3}\left[te^{2t}\right] = e^{3t}\left(\int e^{-3t}\left(te^{2t}\right)dt\right) = -(1+t)e^{2t}$ は $(\Delta-3)(\Delta-2)^2[y]=0$ の一般解に含まれる．

$$\frac{1}{\Delta-2}\left[te^{2t}\right] = e^{2t}\left(\int e^{-2t}\left(te^{2t}\right)dt\right) = \frac{t^2e^{2t}}{2}$$

$$\frac{1}{(\Delta-2)^2}\left[te^{2t}\right] = e^{2t}\left(\int\int e^{-2t}\left(te^{2t}\right)dtdt\right) = \frac{t^3e^{2t}}{6}$$

$$\therefore \quad y = c_1e^{3t} + c_2e^{2t} + c_3te^{2t} - \frac{t^2e^{2t}}{2} - \frac{t^3e^{2t}}{6}$$

$$= c_1x^3 + (c_2 + c_3\log x)x^2 - \left(3+\log x\right)\frac{x^2(\log x)^2}{6}$$

が求める一般解である．

§　連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{y_2}{x} \\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_1}{x} \end{cases}$$

のように，2 個以上の未知函数を含む微分方程式を連立微分方程式という．

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{1}{x}\frac{dy_2}{dx}-\frac{y_2}{x^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{y_1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\left(x\frac{dy_1}{dx}\right)\Leftrightarrow x^2\frac{d^2y_1}{dx^2}+x\frac{dy_1}{dx}-y_1=0$$

これは $Euler$ の微分方程式で，これは $(\Delta(\Delta-1)+\Delta-1)[y_1]=0$ とかける．

$$(\Delta(\Delta-1)+\Delta-1)[y_1]=0\Leftrightarrow(\Delta-1)(\Delta+1)[y_1]=0$$

一般解は $y_1=c_1e^t+c_2e^{-t}=c_1x+c_2\dfrac{1}{x},y_2=x\dfrac{dy_1}{dx}=c_1x-c_2\dfrac{1}{x}$

と表される．

未知函数: $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ について，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m_k}p_{i,j,k}(x)y_j^{(i)}=q_k(x)$$

を連立線形微分方程式という． $D^k=\dfrac{d}{dx^k}\quad(k=0,1,2,\cdots),p_{j,k}(D)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m_k}p_{i,j,k}(x)D^i$

とおくと，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m_k}p_{i,j,k}(x)y_j^{(i)}=q_k(x)\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

のように表すことができる．特に $p_{i,j,k}(x)=p_{i,j,k}$ （定数）のとき，定数係数の連立線形微分方程式という．ここでは特に $n=2$ の場合に考える．すなわち，未知函数 $y_1(x),y_2(x)$ について，

$$\begin{cases}p_{1,1}(D)[y_1]+p_{1,2}(D)[y_2]=q_1(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ p_{2,1}(D)[y_1]+p_{2,2}(D)[y_2]=q_2(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

を考察する． $(1)\times p_{2,2}(D)-(2)\times p_{1,2}(D)$ より，

$$\left(p_{1,1}(D)p_{2,2}(D)-p_{1,2}(D)p_{2,1}(D)\right)[y_1]=\left(p_{2,2}(D)\left[q_1(x)\right]-p_{1,2}(D)\left[q_2(x)\right]\right)$$

これは

$$\begin{vmatrix}p_{1,1}(D) & p_{1,2}(D)\\ p_{21}(D) & p_{2,2}(D)\end{vmatrix}[y_1]=\begin{vmatrix}q_1(x) & p_{1,2}(D)\\ q_2(x) & p_{2,2}(D)\end{vmatrix}$$

と表すこともできる．これを解いて(1)または(2)に代入して y_2 を求める．

注意：☆は次のようにもかける．

例　次の連立線形微分方程式を解け．

(i) $\begin{cases} y'-3y+z=0 \\ y-\ z'+z=0 \end{cases}$　(ii) $\begin{cases} y'+y-z'=x \\ y'-y+z=x^2 \end{cases}$　(iii) $\begin{cases} y'=z+w \\ z'=y-w \\ w'=y-z \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} y''+y+z''+z'+z=x \\ y'+z'+z=e^x \end{cases}$

[解](i)

$$\begin{cases} (D-3)[y]+z=0 \\ -y+(D-1)[z]=0 \end{cases}$$

$$\therefore \big((D-3)(D-1)+1\big)[y]=0 \Leftrightarrow (D-2)^2[y]=0$$

$y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ をうる．これを第 1 式に代入して，

$z=3y-y'=3(c_1+c_2x)e^{2x}-(2c_1+c_2+2c_2x)e^{2x}=\left\{(c_1-c_2)+c_2x\right\}e^{2x}$

$$\text{一般解：}\begin{cases} y=(c_1+c_2x)e^{2x} \\ z=\left\{(c_1-c_2)+c_2x\right\}e^{2x} \end{cases}\quad \text{をうる．}$$

(ii) $\begin{cases} (D+1)[y]-D[z]=x\cdots\cdots(1) \\ (D-1)[y]+z=x^2\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D-1 & 1 \end{vmatrix}[y]=(D^2+1)[y]=3x \Leftrightarrow y''+y=3x$

$y''+y=0$ の一般解は $c_1\cos x+c_2\sin x$ で，$y''+y=3x$ の特殊解は $3x$ であるから，

$y=c_1\cos x+c_2\sin x+3x$, $z=x^2-(D-1)y=(c_1-c_2)\cos x+(c_1+c_2)\sin x+x^2+3x-3$

$$\therefore\ \text{一般解：}\begin{cases} y=c_1\cos x+c_2\sin x+3x \\ z=(c_1-c_2)\cos x+(c_1+c_2)\sin x+x^2+3x-3 \end{cases}\quad \text{をうる．}$$

(iii) $\begin{cases} D[y]-w-z=0\ \cdots\cdots(1) \\ -y+D[z]+w=0\cdots\cdots(2) \\ -y+z+D[w]=0\cdots\cdots(3) \end{cases}$

とかける．そして，$(1)+(2), D\times(1)+(3)$ より，

$$\begin{cases} (D-1)[y]+(D-1)[z]=0\cdots\cdots(4) \\ (D^2-1)[y]-(D-1)[z]=0\cdots\cdots(5) \end{cases}$$

(4)+(5)より，$(D-1)(D+2)[y]=0 \therefore y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$.

(4)より，$(D-1)[z]=-(D-1)[y]=3c_2e^{-2x}$

$$\therefore z=\frac{1}{D-1}\left[3c_2e^{-2x}\right]=e^x\left(\int e^{-x}\left(3c_2e^{-2x}\right)dx+c_3\right)=-c_2e^{-2x}+c_3e^x$$

$$w=D[y]-z=c_1e^x-2c_2e^{-2x}+c_2e^{-2x}-c_3e^x=(c_1-c_3)e^x-c_2e^{-2x}$$

$$\therefore \begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \\ z = c_3 e^x - c_2 e^{-2x} \\ w = (c_1 - c_3) e^x - c_2 e^{-2x} \end{cases}$$

(iv) $\begin{cases} (D^2+1)[y] + (D^2+D+1)[z] = x \\ D[y] + (D+1)[z] = e^x \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} D^2+1 & D^2+D+1 \\ D & D+1 \end{vmatrix} [y] = \begin{vmatrix} x & D^2+D+1 \\ e^x & D+1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore y = (D+1)[x] - (D^2+D+1)[e^x] = x + 1 - 3e^x$$

$$z = \begin{vmatrix} D^2+1 & x \\ D & e^x \end{vmatrix} = (D^2+1)[e^x] - D[x] = 2e^x - 1$$

例 $\begin{cases} y'' - 3y - 4z = \sin x \\ z'' + y + z = \cos x \end{cases}$ を解け.

[解] $\begin{cases} (D^2-3)[y] - 4z = \sin x \\ y + (D^2+1)[z] = \cos x \end{cases}$

$$(D-1)^2 (D+1)^2 [y] = (D^2+1)[\sin x] + 4\cos x = \cos x$$

である．そして，$(D-1)^2(D+1)^2[y] = 0$ の一般解は $(c_1 + c_2 x)e^{-x} + (c_3 + c_4 x)e^x$ で，あるから，$(D-1)^2(D+1)^2[y] = \cos x$ の特殊解を求めればよい.

$$y = \left\{(D-1)^2(D+1)^2\right\}^{-1}[\cos x] = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{D+1} - \frac{1}{D-1} + \frac{1}{(D+1)^2} + \frac{1}{(D-1)^2}\right\}[\cos x]$$

$$\frac{1}{D+1}[\cos x] = e^{-x}\int e^x \cos x dx = \frac{\cos x + \sin x}{2}$$

$$\frac{1}{(D+1)^2}[\cos x] = e^{-x}\int\int e^x \cos x dx dx = \frac{\sin x}{2}$$

$$\frac{1}{D-1}[\cos x] = e^{x}\int e^{-x} \cos x dx = \frac{-\cos x + \sin x}{2}$$

$$\frac{1}{(D-1)^2}[\cos x] = e^{x}\int\int e^{-x} \cos x dx dx = -\frac{\sin x}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}\cos x + (c_1 + c_2 x)e^{-x} + (c_3 + c_4 x)e^x$$

$$\therefore z = \frac{1}{4}\left\{(D^2-3)[y] - \sin x\right\} = -\frac{\cos x + \sin x}{4} - \frac{(c_1 + c_2) + c_2 x}{2}e^{-x} - \frac{(c_3 - c_4) + c^4 x}{2}e^x$$