

## § 変数分離形

$$y' = f(x)g(y)$$

の形の方程式を**変数分離形**という。

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( \int \frac{1}{g(y)} dy \right) = f(x)$$

であるから、

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

注意：導関数が含まれない式になったとき方程式は解けたと見なす。すなわち、必ずしも  $y = f(x)$  の形に表さなくてもよい。

例 次の微分方程式を解け。

(i)  $y' = ky$  ( $k$  は定数)

(ii)  $(1+x^2)yy' + (1+y^2)x = 0$

(iii)  $y' = (y^2 - 1)\tan x$

(iv)  $y'\tan x = \cot y$

(v)  $y' = x^2 e^{-3y}$

(vi)  $y' = -\frac{x-a}{y-b}$

[解] (i)  $\frac{y'}{y} = k \Leftrightarrow \log|y| = kx + c \Leftrightarrow y = Ce^{kx}$

(ii)  $\frac{2y}{2(1+y^2)} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2(1+x^2)} \Leftrightarrow \log(1+y^2) = -\log(1+x^2) + c \Leftrightarrow (1+y^2)(1+x^2) = C$

(iii)

$$\frac{1}{y^2-1} \frac{dy}{dx} = \tan x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = -\log|\cos x| + c \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{C \cos^2 x} \Leftrightarrow y = \frac{C \cos^2 x + 1}{C \cos^2 x - 1}$$

(iv)  $\tan y \frac{dy}{dx} = \cot x \Leftrightarrow -\int \frac{-\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + c \Leftrightarrow -\log|\cos y| + c = \log|\sin x|$

$\therefore \cos y \sin x = C$  をうる。

(v)  $e^{3y} \frac{dy}{dx} = x^2 \Leftrightarrow \int e^{3y} dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow \frac{1}{3} e^{3y} = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} C \Leftrightarrow e^{3y} = x^3 + C$

(vi)  $(y-b) \frac{dy}{dx} = -(x-a) \Leftrightarrow (y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2 \quad (r \text{ は任意定数})$

これは点 $(a,b)$ を中心とする同心円の族を表す.

例 次の微分方程式を解け.

$$(i) \quad y' = \frac{x^2(y+1)}{y^2(x-1)} \quad (ii) \quad y' = \frac{\tan x}{\tan y} \quad (iii) \quad y' = \frac{x^2y}{1+x^3} \quad (y(1)=2)$$

[解] (i)  $\int \frac{y^2}{y+1} dy = \int \frac{x^2}{x-1} dx + C \therefore \frac{1}{2}y^2 - y + \log(y+1) = \frac{1}{2}x^2 + x + \log(x-1) + C$

すなわち,  $(y+x)(y-x-2) + \log\left(\frac{y+1}{x-1}\right)^2 = C$  をうる. 特異解として $y=-1$ .

$$(ii) \quad \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + C \therefore -\log \cos y = -\log \cos x + C \text{ . i.e., } \cos y = C^* \cos x$$

$$(iii) \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2}{1+x^3} dx + C \therefore \log y^3 = \log C(1+x^3) \text{ . 一般解は } y^3 = c(1+x^3) \text{ で,}$$

$y(1)=2$  より,  $c=4$

例 接線影の長さが一定の曲線を求めよ.

[解]  $P(x,y)$ における接線の方程式は $Y = y'(X-x)+y$ とかける. この直線と $x$ 軸

との交点 $N$ の $x$ 座標は $x - \frac{y}{y'}$ である. 題意より, 接線

$$\text{影} = NM = x - \left( x - \frac{y}{y'} \right) = k \text{ (一定). すなわち, } \frac{y}{y'} = k \text{ .}$$

これを解くと,  $y = C \exp\left(\frac{x}{k}\right)$ . これが求める曲線である.

例  $y' = f(ax+by+c)$  ( $b \neq 0$ )

$u = ax+by+c$  とおくと,

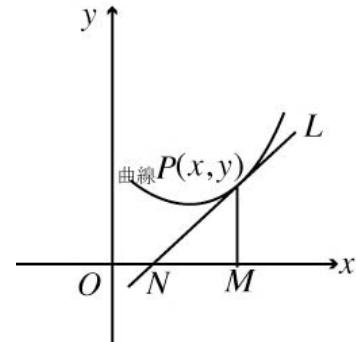
$$\frac{du}{dx} = a+by' = a+bf(u) \Leftrightarrow \frac{1}{a+bf(u)} \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{du}{a+bf(u)} = x+C$$

たとえば,  $y' = (x+y-1)^2$  を解いてみよう.

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = x+C \text{ を計算すればよい.}$$

$$\therefore \arctan u = x+C \Leftrightarrow u = \tan(x+C) \Leftrightarrow x+y-1 = \tan(x+C) \Leftrightarrow y = \tan(x+C) - x + 1$$

例  $y' = \frac{x+y-1}{x+y-2}$



[解]  $u = x + y$  とおく.  $\frac{du}{dx} = 1 + y'$  で,  $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{u-1}{u-2} = \frac{2u-3}{u-2}$  である.

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\log|2u-3| = x + c \Leftrightarrow 2(x+y) - \log|2x+2y-3| = C$$

例 微分方程式  $xy' - y = x\sqrt{x^2 + y^2}$  で,  $y = xu$  と変換して, 変数分離形に直し解を求めよ.

[解]  $y = xu$  とおくと,  $y' = u + xu'$  でこれを与式に代入する.

$$x(u + xu') - xu = x\sqrt{x^2 + x^2u^2} \quad i.e., u' = \sqrt{1+u^2}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = x + C \quad \therefore \log\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) = x + C, \therefore y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cxe^x$$

例 次の微分方程式を解け

$$(i) \ (x+y)^2 y' = a^2 \quad (ii) \ (y-x)\sqrt{1+x^2} y' = (1+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

解] (i)  $x+y=u$  とおく.  $1+y'=u'$  である.  $\therefore u^2(u'-1)=a^2$ ,

$$i.e., \frac{u^2}{a^2+u^2} \frac{du}{dx} = 1 \text{ である. } \therefore u - a \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = x + C$$

$$(ii) \ x = \tan\theta, y = \tan\varphi \text{ とおくと, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = (\sec^2\varphi)(\cos^2\theta)$$

$$(\tan\varphi - \tan\theta)\sqrt{1+\tan^2\theta} \cdot (\sec^2\varphi)(\cos^2\theta) \frac{d\varphi}{d\theta} = (1+\tan^2\varphi)^{\frac{3}{2}}$$

$$(\tan\varphi - \tan\theta) \cdot (\sec^2\varphi)(\cos\theta) \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\cos^3\varphi}, \therefore (\tan\varphi - \tan\theta) \cos\varphi \cos\theta \frac{d\varphi}{d\theta} = 1$$

$$\therefore \sin(\varphi - \theta) \frac{d\varphi}{d\theta} = 1. \text{ 更に } \varphi - \theta = \xi \text{ と変換すると, で, } 1 - \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{d\xi}{d\varphi}$$

であるから,  $\frac{d\xi}{d\varphi} = 1 - \sin\xi$ ,  $\therefore \int \frac{d\xi}{1-\sin\xi} = \varphi + C$  を計算すればよい.

$$\begin{aligned} \int \frac{d\xi}{1-\sin\xi} &= \int \frac{1+\sin\xi}{1-\sin^2\xi} d\xi = \int \frac{1+\sin\xi}{\cos^2\xi} d\xi = \int \left( \frac{1}{\cos^2\xi} + \frac{\sin\xi}{\cos^2\xi} \right) d\xi = \tan\xi + \frac{1}{\cos\xi} \\ &= \tan(\varphi - \theta) + \frac{1}{\cos(\varphi - \theta)} = \tan(\varphi - \theta) + \sqrt{1 + \tan^2(\varphi - \theta)} \end{aligned}$$

$$\tan(\varphi - \theta) = \frac{\tan \varphi - \tan \theta}{1 + \tan \varphi \tan \theta} = \frac{x - y}{1 + xy}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\tan(\varphi - \theta) + \sqrt{1 + \tan^2(\varphi - \theta)} &= \frac{y - x}{1 + xy} + \sqrt{1 + \left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)^2} = \frac{(y - x) + \sqrt{1 + y^2} \sqrt{1 + x^2}}{1 + xy} \\ \therefore \text{一般解は } \frac{(y - x) + \sqrt{1 + y^2} \sqrt{1 + x^2}}{1 + xy} &= \arctan y + C\end{aligned}$$

例 微分方程式:  $yf(xy) + xg(xy)y' = 0$  を適当な変数変換により、変数分離形にせよ。

[解]  $xy = u$  と変換すると、 $y + xy' = u'$  で、

$$\begin{aligned}\text{左辺} = yf(u) + xg(u)\left(\frac{u' - y}{x}\right) &= yf(u) + g(u)u' - yg(u) = \frac{u}{x}(f(u) - g(u)) + g(u)\frac{du}{dx} \\ \therefore \frac{g(u)}{u(f(u) - g(u))}\frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x}\end{aligned}$$

§  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  の形の方程式を同次形という。

$u = \frac{y}{x}$  とおく。 $y = ux$  であるから、 $y' = u'x + u$

$$y' = u'x + u \Leftrightarrow f(u) - u = \frac{du}{dx}x \Leftrightarrow \frac{1}{f(u) - u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{f(u) - u}du = \log|x| + C$$

であるから、解は

$$x = C \cdot \exp\left(\int \frac{1}{f(u) - u}du\right)$$

のようく表される。

例 次の微分方程式を解け

$$(i) \quad x^2y' = y^2 + 2xy \quad (ii) \quad y^2 + (x^2 - xy)y' = 0 \quad (iii) \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$$

$$[解](i) \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} \text{ とかける。} \quad \frac{y}{x} = u \text{ とおくと,} \quad \int \frac{du}{(u^2 + 2u) - u} = \log|x| + C$$

$$\therefore Cx = \exp\left(\int \frac{1}{u^2 + u}du\right) = \exp\left(\log\left|\frac{u}{u+1}\right|\right) = \left|\frac{y}{y+x}\right| \text{ i.e., } y = \frac{Cx^2}{Cx-1} \text{ をうる。}$$

(ii)  $y' = -\frac{y^2}{x^2 - xy} = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - \frac{y}{x}}$  で、 $\frac{y}{x} = u$  とすると、

$$\int \left( -\frac{du}{\frac{u^2}{1-u} - u} \right) = \int \frac{u-1}{u} du = \int \left( 1 - \frac{1}{u} \right) du = u - \log u = \log x + C$$

∴一般解は  $y = C \exp\left(\frac{y}{x}\right)$  である。

(iii)  $y' = f(u) = u + \sqrt{1+u^2}$  とかけている。

$$\therefore \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \log x + C \quad i.e., y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$$

例  $(x^2 + y^2 + a^2)y' + 2xy = 0$

[解]  $x^2 + a^2 = \xi, y^2 = \eta$  と変換すると、 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2y} \frac{d\eta}{d\xi} 2x = \frac{x}{y} \frac{d\eta}{d\xi}$

与式は  $(\xi + \eta) \frac{d\eta}{d\xi} + 2\eta = 0, \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\eta}{\xi + \eta} = -\frac{2(\eta/\xi)}{1 + (\eta/\xi)}$  とかける。

そこで、 $\frac{\eta}{\xi} = u$  とおくと、 $-\int \frac{u+1}{u(u+3)} du = \log|\xi| + C$

$$\therefore -\left(\frac{1}{3} \log u + \frac{2}{3} \log(u+3)\right) = \log|\xi| + C \therefore \log u(u+3)^2 |\xi|^3 = C, \therefore \xi^3(u+3)^2 u = C$$

すなわち、 $(\eta + 3\xi)^2 \eta = C$  で、 $y^2(y^2 + 3x^2 + 3a^2)^2 = C$  をうる。

例  $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right) \quad (aq-bp \neq 0)$

連立 1 次方程式 :  $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ px+qy+r=0 \end{cases}$

の解を  $(x_0, y_0)$  とする。そこで、 $x = u + x_0, y = v + y_0$  と変数変換する。

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = 1 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot 1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{pu+qv}\right)$$

を解けばよい.  $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a+b(v/u)}{p+q(v/u)}\right)$  とかけるから,  $w = \frac{v}{u}$  とおくと,

$$\int \frac{dw}{f\left(\frac{a+bw}{p+qw}\right) - w} = \log|u| + c$$

と解ける.

例 (i)  $y' = \frac{2x-3y+4}{3x+2y-7}$  (ii)  $(2x-y+3)-(x-2y+3)y' = 0$

[解]  $2x-3y+4=0, 3x+2y-7=0$  を解くと,  $x=1, y=2$  であるから,  $u=x-1, v=y-2$  と変換.

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u-3v}{3u+2v} \text{ を解く. } w = \frac{v}{u} \text{ とおく. } \int \frac{dw}{\frac{2-3w}{3+2w} - w} = \log|u| + c \text{ を計算すればよい.}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \int \frac{2w+3}{w^2+3w-1} dw = \log|u| + c \Leftrightarrow \log|w^2+3w-1| + \log u^2 = c$$

$$\therefore v^2 + 3uv - u^2 = C \Leftrightarrow (y-2)^2 + 3(x-1)(y-2) - (x-1)^2 = C \\ \therefore -x^2 - 4x + 9 + 3xy - 7y + y^2 = C$$

(ii)  $2x-y+3=0, x-2y+3=0$  の解は  $(x, y) = (-1, 1)$ .  $u=x+1, v=y-1$  と変換する.  $\frac{dv}{du} = \frac{2u-v}{u-2v}$  を解く.  $\frac{v}{u} = w$  と更に変換して,

$$\int \frac{1}{\frac{2-w}{1-2w} - w} dw = \log u + C \text{ ie., } -\frac{1}{2} \int \frac{2w-1}{w^2-w+1} dw = \log u + C$$

$$\therefore \log|w^2-w+1| + \log u^2 = C. \text{ i.e., } x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y = C$$

例  $y' = \frac{3x-4y-2}{4x+3y-3}$

[解]  $3x-4y-2=0, 4x+3y-3=0$  の解は  $x=\frac{18}{25}, y=\frac{1}{25}$  である.  $u=x-\frac{18}{25}, v=y-\frac{1}{25}$ ,

$v = y - \frac{1}{25}$  と変換する.

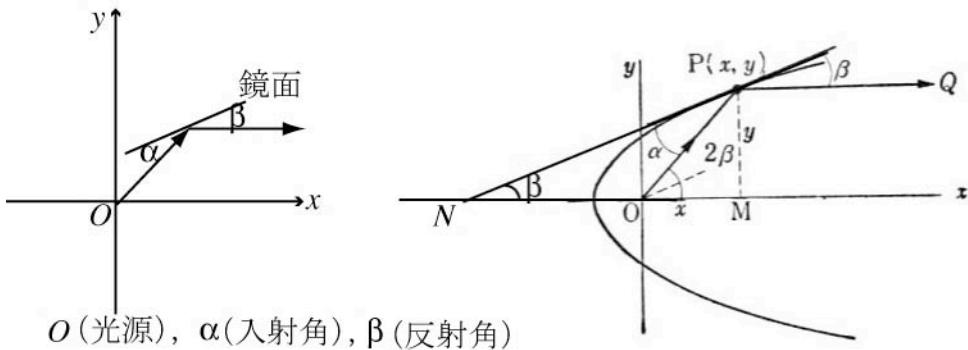
$$\frac{dv}{du} = \frac{3u - 4v}{4v + 3u} \Leftrightarrow \int \frac{1}{\frac{3-4w}{4+3w}-w} dw = \log|u| + c \quad \left( w = \frac{v}{u} \right)$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \int \frac{6w+8}{3w^2+8w-3} dw = \log|u| + c \Leftrightarrow \log|(3w^2+8w-3)u^2| = c$$

$$\therefore 3v^2 + 8uv - 3u^2 = C \Leftrightarrow -1875x^2 - 50x + 144 + 5000xy - 3750y + 1875y^2 = C$$

例 1 つの光源から発する光が、すべてある定まった直線に平行に反射するという。そのような反射鏡はどのようなものか。

[解]



上の図のように  $xy$ -平面で原点を光源とし、原点から発した光が反射鏡にあたつて  $x$  軸に平行に進むとして考える。反射鏡の断面曲線は  $xy$ -平面で曲線  $y = y(x)$  とするとき、この曲線を  $x$  軸に関して回転させて得られた面が求める面と考える。すなわち、この曲線  $y = y(x)$  を微分方程式で記述すればよい。反射点  $P$  の十分近くでは  $P$  における曲線の接線が反射面と考えられる。

入射角を  $\alpha$ 、反射角を  $\beta$  とすると、光の原理から  $\alpha = \beta$  で、 $\angle POM = \alpha + \beta = 2\beta$  である。

$$\tan \beta = \frac{dy}{dx}, \quad \tan 2\beta = \frac{y}{x}, \quad \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$$

であるから、

$$\frac{y}{x} = \frac{2 \frac{dy}{dx}}{1 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \quad i.e., \frac{dy}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2}}{\left( \frac{y}{x} \right)}$$

$$\text{とかける。 } \frac{y}{x} = u \text{ とおくと, } f(u) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + u^2}}{u}$$

$$\int \frac{1}{f(u)-u} du = \log|x| + C$$

を計算する.

$$\int \frac{1}{f(u)-u} du = \int \frac{u du}{-(1+u^2) \pm \sqrt{1+u^2}} = \int \frac{u du}{\{-\sqrt{1+u^2} \pm 1\} \sqrt{1+u^2}}$$

そこで,  $\sqrt{1+u^2} = t$ , と置換すると,

$$\int \frac{1}{f(u)-u} du = \int \frac{dt}{-t \pm 1} = - \int \frac{dt}{t \mp 1} = -\log(t \mp 1) = -\log(\sqrt{1+u^2} \mp 1)$$

$$\therefore -\log(\sqrt{1+u^2} \mp 1) = \log|x| + C$$

$$\therefore |x| = \frac{C}{\sqrt{1+u^2} \pm 1} \quad \therefore \sqrt{x^2 + y^2} \pm |x| = C \quad i.e., y^2 = C^2 \pm 2C|x|$$

## § 1 階線形微分方程式

未知函数  $y(x)$  について, 微分方程式

★  $y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x)$

を  $n$  階線形微分方程式という. 特に  $q(x) \equiv 0$  のとき, すなわち,

★★  $y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$

を 齊次とか同次形の線形微分方程式といふ.  $q(x) \neq 0$  のとき非齊次形の線形微分方程式といふ.

$V$  は  $C^\infty$  級の函数の集合とする.  $f, g \in V$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  について  $f + g \in V$ ,  $\alpha f \in V$  であることは明らかである. すなわち,  $V$  は  $\mathbf{R}$  上ベクトル空間である. そして,

$$\text{写像 } L: V \rightarrow V \left( y(x) \mapsto y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y \right)$$

は線形写像である. なぜならば,  $y_1, y_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$  について,

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n)} + p_{n-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n-1)} + \cdots + p_0(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= \alpha(y_1^{(n)} + p_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + p_0y_1) + \beta(y_2^{(n)} + p_{n-1}y_2^{(n-1)} + \cdots + p_0y_2)$$

$$= \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$$

齊次線形微分方程式★★の解の集合  $V^*$  は  $V$  の部分空間であることは明らかである. 何らかの方法で見つけた非齊次線形微分方程式★1 の特殊解  $f_0(x)$  とし, 齊次線形微分方程式★★の任意の解の  $f(x)$  とすると,  $f(x) + f_0(x)$  が★の任意の

解である。なぜならば

$$L(f(x) + f_0(x)) = L(f(x)) + L(f_0(x)) = 0 + L(f_0(x)) = q(x)$$

すなわち、

★の任意の解 = (★★の任意に解) + (★の1つの特殊解)  
の形に表されることがわかる。

注意：★が線形微分方程式と呼ばれる所以は線形代数からきている。

ここではまず  $n=1$  の場合、すなわち1階の線形微分方程式を扱う。

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \text{-----☆}$$

$$y' + p(x)y = 0 \quad \text{-----☆☆}$$

を考察する。まず  $y' + p(x)y = 0$  の任意の解（一般解）を求めよう。

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \Leftrightarrow \log|y| = -\int p(x)dx + c \Leftrightarrow y = C \exp\left(-\int p(x)dx\right) \quad (C \text{ は任意定数})$$

をうる。次に☆の特殊解を求める。ここで、定数  $C$  を  $x$  の函数とみて、すなわち、

$$y = C(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

が  $y' + p(x)y = q(x)$  の解になるように  $C(x)$  を決める。

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= \left\{ C'(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right) - p(x)C(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right) \right\} \\ &\quad + p(x)C(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right) = q(x) \end{aligned}$$

であるから、

$$C'(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right) = q(x), \therefore C(x) = \int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx$$

で次の解の公式をうる。

$$y = \exp\left(-\int p(x)dx\right) \left( \int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx + C \right) \quad (C \text{ は意定数})$$

このような解の求め方を定数変化法という。

例 次の微分方程式を解け。

$$(i) \quad y' + y = x \quad (ii) \quad y' + y \cos x = e^{-\sin x}$$

$$(iii) \quad y' - y = \sin x \quad (iv) \quad y' - 5y = 4x^3 - 6x^2 + 11x - 2$$

$$(v) \quad xy' + 2y = \sin x \quad (vi) \quad y' \sec^2 y + \frac{x \tan y}{1+x^2} = x$$

$$(vii) \quad y' + y \cot x = \sec^2 x \quad (viii) \quad xy' + y = x \log x$$

$$(ix) \quad y' = 4e^{-y} \sin x - 1 \quad (x) \quad (4r^2 s - 6)dr + r^3 ds = 0$$

$$(xi) \quad xy' + y = x(1 - x^2) \quad (xii) \quad (\sin x \cos x)y' + y = 2 \tan x$$

[解] (i)  $y = \exp\left(-\int 1 dx\right) \left\{ C + \int x \exp\left(\int 1 dx\right) dx \right\} = e^{-x} \left( C + \int x e^x dx \right) = Ce^{-x} + x - 1$

$$(ii) \quad y = \exp\left(-\int \cos x dx\right) \left\{ C + \int e^{-\sin x} \exp\left(\int \cos x dx\right) dx \right\} = e^{-\sin x} \left( C + \int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx \right) \\ = e^{-\sin x} (x + C)$$

$$(iii) \quad y = \exp\left(-\int -1 dx\right) \left( C + \int \sin x \exp\left(\int -1 dx\right) dx \right) = e^x \left( C + \int e^{-x} \sin x dx \right) \\ = Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

$$(iv) \quad y = \exp\left(-\int -5 dx\right) \left( C + \int (4x^3 - 6x^2 + 11x - 2) \exp\left(\int -5 dx\right) dx \right) \\ = e^{5x} \left\{ C + 4 \int x^3 e^{-5x} dx - 6 \int x^2 e^{-5x} dx + 11 \int x e^{-5x} dx - 2 \int e^{-5x} dx \right\} \\ = Ce^{5x} + 4 \left\{ -\frac{1}{625}(125x^3 + 75x^2 + 30x + 6) \right\} - 6 \left\{ -\frac{1}{125}(25x^2 + 10x + 2) \right\} \\ + 11 \left\{ -\frac{1}{25}(5x + 1) \right\} - 2 \left( -\frac{1}{5} \right) \\ = -\frac{4}{5}x^3 + \frac{18}{25}x^2 - \frac{239}{125}x + \frac{11}{625} + Ce^{5x}$$

注：特殊解を  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  として、方程式に代入すると、

$$-(5a+4)x^3 + (3a-5b+6)x^2 + (2b-5c-11)x + (c-5d+2) \equiv 0$$

であることから、 $a = -\frac{4}{5}, b = \frac{18}{25}, c = \frac{-239}{125}, d = \frac{11}{625}$  をうる。

$$(v) \quad y = \exp\left(-\int \frac{2}{x} dx\right) \left( C + \int \frac{\sin x}{x} \exp\left(\int \frac{2}{x} dx\right) dx \right) = \frac{1}{x^2} \left( C + \int \frac{\sin x}{x} \cdot x^2 dx \right) \\ = \frac{1}{x^2} \left( C + \int x \sin x dx \right) = \frac{1}{x^2} (C + \sin x - x \cos x)$$

$$(vi) \quad z = \tan y \quad \text{と変換すると,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \left( \frac{dz}{dy} \right)^{-1} \frac{dz}{dx} = \cos^2 y \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \cos^2 y \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{1+x^2} z = x, \quad i.e., \frac{dz}{dx} + \frac{x}{1+x^2} z = x$$

を解けばよい。

$$\begin{aligned} \tan y &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx\right) \left\{ C + \int x \exp\left(\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx\right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left( C + \int x \sqrt{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left( C + \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3 \right) = \frac{1+x^2}{3} + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$(vii) \quad y = \exp\left(-\int \cot x dx\right) \left\{ C + \int \sec^2 x \exp\left(\int \cot x dx\right) dx \right\}$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sin x} \left( C + \int \sec^2 x \sin x dx \right) = \frac{1}{\sin x} \left( C + \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$\begin{aligned} (viii) \quad y &= \exp\left(-\int \frac{1}{x} dx\right) \left\{ C + \int (\log x) \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) dx \right\} \\ &\therefore y = \frac{1}{x} \left( C + \int x \log x dx \right) = \frac{1}{x} \left( C + \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right) \end{aligned}$$

$$(ix) \quad y' = 4e^{-y} \sin x - 1 \Leftrightarrow e^y y' + e^y = 4 \sin x \Leftrightarrow (e^y)' + e^y = 4 \sin x$$

$$e^y = \exp\left(-\int dx\right) \left( C + \int 4 \sin x \cdot \exp\left(\int dx\right) dx \right) = e^{-x} \left( C + 4 \int e^x \sin x dx \right)$$

$$\therefore e^y = e^{-x} \left( C + 2(-\cos x + \sin x)e^x \right) = Ce^{-x} - 2\cos x + 2\sin x$$

$$(x) \text{ 与式} \Leftrightarrow \frac{ds}{dr} + \frac{4}{r}s = \frac{6}{r^3} \Leftrightarrow s = \exp\left(-\int \frac{4}{r} dr\right) \left( C + \int \frac{6}{r^3} \exp\left(\int \frac{4}{r} dr\right) dr \right) = \frac{C}{r^4} + \frac{3}{r^2}$$

$$(xi) \quad y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( C + \int (1-x^2) e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) = \frac{1}{x} \left( C + \int (1-x^2) x dx \right) = \frac{1}{x} \left( C + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{4} \right)$$

$$(xii) \quad y = \exp\left(-\int \frac{dx}{\sin x \cos x}\right) \left\{ C + \int \frac{2}{\cos^2 x} \exp\left(\int \frac{dx}{\sin x \cos x}\right) dx \right\}$$

$$\text{ところで, } \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(\tan x)'}{\tan x} dx = \log(\tan x) \text{ であるから,}$$

$$\int \frac{2}{\cos^2 x} \exp\left(\int \frac{dx}{\sin x \cos x}\right) dx = \int 2 \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (\tan^2 x)' dx = \tan^2 x$$

$$\therefore y = \cot x \left( C + \tan^2 x \right) = C \cot x + \tan x$$

## § Bernoulli(ベルヌイ)の微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \text{ は非負整数})$$

を Bernoulli(ベルヌイ)の微分方程式という。 $n=0,1$ とときは解決済みである。

これからは $n \neq 0,1$ とする。方程式の両辺に $(1-n)y^{-n}$ をかけると、

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)q(x)$$

である。そして、方程式は次のようにかける。

$$(y^{1-n})' + \{(1-n)p(x)\}y^{1-n} = (1-n)q(x)$$

$$y^{1-n} = \exp\left(-(1-n)\int p(x)dx\right) \left\{ C + \int (1-n)q(x)\exp\left(\int (1-n)p(x)dx\right) dx \right\}$$

と解ける。

例 次の微分方程式を解け。

$$(i) \quad xy' + y = y^2 \log x \quad (ii) \quad y' + y \sin x = y^2 \sin x$$

$$(iii) \quad y' + y = y^3 x \quad (iv) \quad y' - \frac{y}{3x} = y^4 \log x$$

$$(v) \quad y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$$

[解] (i) 両辺に $-x^{-1}y^{-2}$ をかけると、

$$-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{\log x}{x} \Leftrightarrow (y^{-1})' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{\log x}{x}$$

$$\text{である。 } \therefore \frac{1}{y} = \exp\left(-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right) \left\{ C + \int\left(-\frac{\log x}{x}\right) \exp\left(\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right) dx \right\}$$

$$\text{解: } \frac{1}{y} = x \left( C - \int \frac{\log x}{x^2} dx \right) = x \left( \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} + C \right) = \log x + 1 + Cx$$

をうる。

(ii)  $-y^{-2}$ を両辺にかけると、 $-y^{-2}y' - y^{-1} \sin x = -\sin x$ である。

$$(y^{-1})' - y^{-1} \sin x = -\sin x \Leftrightarrow y^{-1} = \exp\left(-\int -\sin x dx\right) \left\{ C + \int (-\sin x) \exp\left(\int -\sin x dx\right) dx \right\}$$

$$\therefore y^{-1} = e^{-\cos x} \left( C - \int (\sin x) \exp(\cos x) dx \right) = e^{-\cos x} \left( C + e^{\cos x} \right) = Ce^{-\cos x} + 1$$

(iii)  $-2y^{-3}$ を両辺にかける。 $(y^{-2})' - 2y^{-2} = -2x$ である。

$$\therefore y^{-2} = \exp\left(-\int -2 dx\right) \left( C + \int (-2x) \exp\left(\int -2 dx\right) dx \right) = e^{2x} \left( C - 2 \int xe^{-2x} dx \right)$$

$$y^{-2} = e^{2x} \left( C + \frac{1}{2}(1+2x)e^{-2x} \right) = Ce^{2x} + x + \frac{1}{2}$$

$$(iv) \text{ 与式} \Leftrightarrow (1-4)y^{-4}y' - (1-4)\frac{1}{3x}y^{-3} = -3\log x \Leftrightarrow (y^{-3})' + \frac{1}{x}y^{-3} = -3\log x$$

$$\begin{aligned} y^{-3} &= \exp\left(-\int \frac{1}{x}dx\right) \left\{ C + \int -3\log x \exp\left(\int \frac{1}{x}dx\right) dx \right\} = \frac{1}{x}\left(C - 3\int x \log x dx\right) \\ \therefore \frac{1}{y^3} &= \frac{1}{x}\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^2 \log x + C\right) \end{aligned}$$

$$(v) \text{ 与式} \Leftrightarrow -2y^{-3}y' + (-2)(-xy^{-2}) = 2e^{-x^2} \Leftrightarrow (y^{-2})' + 2xy^{-2} = 2e^{-x^2}$$

$$\therefore y^{-2} = \exp\left(-\int 2xdx\right) \left( C + \int 2e^{-x^2} \exp\left(\int 2xdx\right) dx \right) = e^{-x^2} \left( C + \int 2dx \right) = e^{-x^2} (C + 2x)$$

### § Riccati (リッカチ) の微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)y + s(x)$$

を Riccati (リッカチ) の微分方程式という。 $q(x) \equiv 0$  のときには線形微分方程式に帰着する。この方程式は一般には求積法では解けないことが知られている。しかし何らかの方法で特殊解がわかっているときに求積法により一般解を求めることができる。今 1 つの特殊解  $\varphi(x)$  がわかっているとする。

$$y(x) = u(x) + \varphi(x)$$

とおく。これを方程式に代入すると、

$$u' + \varphi' + pu + p\varphi = q(u^2 + 2u\varphi + \varphi^2) + ru + r\varphi + s$$

$$u' + (p - 2q\varphi - r)u = qu^2$$

となり、Bernoulli(ベルヌイ)の微分方程式に帰着する。

$$\text{例 } y' - y = -\frac{\cos x}{\cos x - \sin x}y^2 + \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \quad (y=1 \text{ が特殊解})$$

$$[\text{解}] \quad y = u + 1 \text{ とおく。 } p - 2q\varphi - r = -1 + 2\frac{\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \text{ より,}$$

$$u' + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}u = -\frac{\cos x}{\cos x - \sin x}u^2 \Leftrightarrow (u^{-1})' - \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}u^{-1} = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$$

$$u^{-1} = \exp\left(\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx\right) \left\{ C + \int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} \exp\left(\int -\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx\right) dx \right\}$$

$$\therefore u^{-1} = \frac{1}{\cos x - \sin x} \left( C + \int \cos x dx \right) = \frac{C + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$\therefore \text{求める解は } y = u + 1 = \frac{\cos x - \sin x}{C + \sin x} + 1 = \frac{C + \cos x}{C + \sin x}$$

例  $xy' - y + 2y^2 = 2x^2$  ( $\varphi(x) = x$  が一つの特殊解)

[解] 与式は  $y' - \frac{1}{x}y = -2\frac{1}{x}y^2 + 2x$  とかける.

$$p - 2q\varphi - r = -\frac{1}{x} - 2\left(-2\frac{1}{x}\right)x = \frac{4x-1}{x}$$

であるから,  $u' + \frac{4x-1}{x}u = -\frac{2}{x}u^2$  を解けばよい.

$$(u^{-1})' - \frac{4x-1}{x}u^{-1} = \frac{2}{x} \quad \text{て}, \quad u^{-1} = \exp\left(\int \frac{4x-1}{x}dx\right)\left\{C + \int \frac{2}{x}\exp\left(\int -\frac{4x-1}{x}dx\right)dx\right\}$$

$$u^{-1} = \exp(4x - \log x)\left(C + \int \frac{2}{x}(x \cdot e^{-4x})dx\right) = \frac{e^{4x}}{x}\left(C - \frac{1}{2}e^{-4x}\right) = \frac{Ce^{4x}}{x} - \frac{1}{2x}$$

求める解は  $y = u + x = \frac{x(1+ce^{4x})}{-1+ce^{4x}}$  ( $c = 2C$ ) である.

例  $y' + (\sin x)y = y^2 + \cos x$  ( $\varphi(x) = \sin x$  が特殊解) を解け

[解]  $y = u + \sin x$  とする.  $u' + (\sin x - 2\sin x)u = u^2$  i.e.,  $u' - (\sin x)u = u^2$

$$(u^{-1})' + (\sin x)u^{-1} = -1$$

$$u^{-1} = \exp\left(-\int \sin x dx\right)\left\{C + \int (-1)\exp\left(\int \sin x dx\right)dx\right\} = e^{\cos x}\left(C - \int e^{-\cos x} dx\right)$$

$$\therefore \text{一般解は } \frac{1}{y - \sin x} = e^{\cos x}\left(C - \int e^{-\cos x} dx\right)$$

例  $y' + \frac{4x}{2x^2 - x} - \frac{1+4x}{2x^2 - x}y + \frac{1}{2x^2 - x}y^2 = 0$  ( $y=1$  が特殊解)

[解]  $y = u + 1$  と変換する.  $p - 2q\varphi - r = -\frac{1+4x}{2x^2 - x} - 2 \cdot \frac{-1}{2x^2 - x} = \frac{1-4x}{2x^2 - x}$  であるから,

$$u' + \frac{1-4x}{2x^2 - x}u = -\frac{-1}{2x^2 - x}u^2 \Leftrightarrow (u^{-1})' - \frac{1-4x}{2x^2 - x}u^{-1} = \frac{1}{2x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow (u^{-1})'(2x^2 - x) + u^{-1}(4x - 1) = 1 \Leftrightarrow (u^{-1}(2x^2 - x))' = 1 \Leftrightarrow u^{-1}(2x^2 - x) = x + C$$

$\therefore (y-1)(x+C) = (2x^2 - x)$  をうる.

例 リッカチの微分方程式の一般解は次の形をもつことを示せ

$$y = \frac{c f_1(x) + f_2(x)}{c f_3(x) + f_4(x)}$$

またこの形の函数はリッカチの微分方程式の解であることを示せ

[解] 特殊解を  $\varphi$ ,  $y = u + \varphi$  とすると,  $(u^{-1})' - (p - 2q\varphi - r)u^{-1} = -q$  の形に変換されることは前に述べた.

$$u^{-1} = \exp\left(\int(p - 2q\varphi - r)dx\right)\left\{C + \int(-q)\exp\left(-\int(p - 2q\varphi - r)dx\right)dx\right\} = f_3(x) + cf_4(x)$$

のように解ける. この形から,

$$y = (u^{-1})^{-1} + \varphi = \frac{1}{f_3 + cf_4} + \varphi = \frac{f_1 + cf_2}{f_3 + cf_4}$$

与式を  $c$  について解くと,  $c = \frac{-f_4y + f_2}{f_3y - f_1}$  をうる. そして両辺を微分すると,

$$\frac{(-f_4y + f_2)'(f_3y - f_1) - (f_3y - f_1)'(-f_4y + f_2)}{(f_3y - f_1)^2} = 0$$

$$\therefore (-f_4y + f_2)'(f_3y - f_1) - (f_3y - f_1)'(-f_4y + f_2) = 0$$

この式を整理すると,

$$y' + \phi(x)y = \psi(x)y^2 + R(x)$$

となる. これはリッカチの微分方程式である.

## § 完全微分方程式

$$\text{微分方程式 : } p(x,y) + q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

を次のような形に表す

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$$

そのとき,  $d\varphi(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$  であるような函数  $\varphi(x,y)$  がとれるときこの微分方程式を完全微分方程式といいう. そのとき,  $\varphi(x,y) = C$  が一般解である. なぜならば,

$$\frac{d}{dx}\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = p(x,y) + q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

である. また  $\varphi(x,y)$  をこの微分方程式の積分とも呼ばれている.

完全微分方程式であるための条件を考察する.

定理  $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$  が完全である  $\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$

[証明]  $\Rightarrow$  を示す.  $d\varphi(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$  である函数  $\varphi$  が存在する.

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = p, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = q$  で,  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$  であることから,  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$  をうる.

$\Leftarrow$ を示そう.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

とする.

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx$$

とおく.  $\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y), \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = p_y(x, y) = q_x(x, y)$  である.

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial y} - q(x, y) \right) = 0$  であるから,  $\frac{\partial F}{\partial y} - q(x, y)$  は  $y$  のみの函数であり, これを  $\psi(y)$  とする.

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \psi(y) \right) dy = d \left( F(x, y) - \int \psi(y) dy \right)$$

とかけている. これは  $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$  が完全であることを意味する.

[証明終]

完全微分方程式  $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$  の一般解を求めよう.

$$F(x, y) - \int \psi(y) dy = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

でなければならないから, 一般解は

$$\int p(x, y) dx + \int \left( q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx \right) dy = C$$

と表されることがわかる.

$$\text{例 } (x^3 + 2xy + y) dx + (y^3 + x^2 + x) dy = 0$$

$$[\text{解}] \quad \frac{\partial}{\partial y} (x^3 + 2xy + y) = 2x + 1, \frac{\partial}{\partial x} (y^3 + x^2 + x) = 2x + 1 \text{ であるから, 完全である.}$$

$$\int (x^3 + 2xy + y) dx + \int \left\{ (y^3 + x^2 + x) - \frac{\partial}{\partial y} \int (x^3 + 2xy + y) dx \right\} dy = C$$

$$\frac{x^4}{4} + x^2 y + xy + \int \{(y^3 + x^2 + x) - (x^2 + x)\} dy = C$$

$$\text{一般解は } \frac{x^4}{4} + x^2 y + xy + \frac{y^4}{4} = C \quad (C \text{ は任意定数}) \text{ である.}$$

次のような解き方もある.

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x p(x, y) dx + \int_{y_0}^y q(x_0, y) dy$$

とおく。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = p(x, y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial p}{\partial y} dx + q(x_0, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial q}{\partial x} dx + q(x_0, y) = \{q(x, y) - q(x_0, y)\} - q(x_0, y) = q(x, y)$$

すなわち、 $d\Phi(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy$  がわかる。これは一般解は

$$\int_{x_0}^x p(x, y) dx + \int_{y_0}^y q(x_0, y) dy = C$$

と表されることを意味する。上の例をこの公式を使って解いてみよう。

$$\int_0^x (x^3 + 2xy + y) dx + \int_0^y y^3 dy = \frac{x^4}{4} + x^2 y + xy + \frac{y^4}{4} = C$$

例 次の微分方程式が完全微分方程式であることを示し一般解を求めよ

$$(i) (2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$$

$$(ii) (1 - \cos y + y \cos x)dx + (2 + \sin x + x \sin y)dy = 0$$

$$(iii) (y^2 + e^x \sin y)dx + (2xy + e^x \cos y)dy = 0$$

$$(iv) (x^2 + \log y)dx + \frac{x}{y} dy = 0$$

$$(v) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \left( \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0$$

$$[解] (i) \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) = -1, \frac{\partial}{\partial x}(2y - x) = -1 \text{ であるから完全である。}$$

$$\text{一般解は } \int_0^x (2x - y) dx + \int_0^y 2y dy = C, \text{ すなわち, } x^2 - xy + y^2 = C$$

$$(ii) \frac{\partial}{\partial y}(1 - \cos y + y \cos x) = \sin y + \cos x, \frac{\partial}{\partial x}(2 + \sin x + x \sin y) = \cos x + \sin y$$

であるから完全である。一般解は

$$\int_0^x (1 - \cos y + y \cos x) dx + \int_0^y 2 dy = C \text{ すなわち, } x - x \cos y + y \sin x + 2y = C$$

$$(iii) \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^x \sin y) = 2y + e^x \cos y, \frac{\partial}{\partial x}(2xy + e^x \cos y) = 2y + e^x \cos y \text{ であるから完}$$

全である。一般解は

$$\int_0^x (y^2 + e^x \sin y) dx + \int_0^y \cos y dy = C, xy^2 + e^x \sin y - \sin y + \sin y = xy^2 + e^x \sin y = C$$

である。

(iv)  $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + \log y) = \frac{1}{y}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{y} = \frac{1}{y}$  であるから完全である。一般解は

$$\int_0^x (x^2 + \log y) dx + \int_{y_0}^y 0 dy = C \text{ すなわち } \frac{x^3}{3} + x \log y = C$$

(v)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y} - \frac{x}{y \sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= -\frac{1}{y \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2}{y(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

であるから完全である。

$$\text{不定積分の公式 } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \log(x + \sqrt{x^2 + a}) \quad (a > 0)$$

を思い出しておこう。そこで一般解は

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \int_{y_0}^y \frac{1}{y} dy = C, \log\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = C, \text{ すなわち } x + \sqrt{x^2 + y^2} = C \text{ である。}$$

例 次の微分方程式が完全微分方程式であることを示し一般解を求めよ

- (i)  $(7x - 3y + 2)dx + (-3x + 4y - 5)dy = 0$
- (ii)  $(x^3 + 5xy^2)dx + (5x^2y + 2y^3)dy = 0$
- (iii)  $(y^2 + e^x \sin y)dx + (2xy + e^x \cos y)dy = 0$
- (iv)  $(ax^2 + 2hxy + by^2)dx + (hx^2 + 2bxy + cy^2)dy = 0$
- (v)  $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - x)dy = 0$

$$(vi) (\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$$

[解] (i)  $\frac{\partial}{\partial y}(7x - 3y + 2) = \frac{\partial}{\partial x}(-3x + 4y - 5) = -3$ .

$$\int_0^x (7x - 3y + 2)dx + \int_0^y (4y - 5)dy = C, \therefore \frac{7}{2}x^2 - 3xy + 2x + 2y^2 - 5y = C$$

(ii)  $\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 5xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(5x^2y + 2y^3) = 10xy$  であるから完全.

$$\therefore \int_0^x (x^3 + 5xy^2)dx + \int_0^y 2y^3 dy = C, \text{すなわち } \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{2} = C$$

(iii)  $\frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^x \sin y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + e^x \cos y) = 2y + e^x \sin y$  であるから完全.

$$\int_0^x (y^2 + e^x \sin y)dx + \int_0^y \cos y dy = xy^2 + e^x \sin y \therefore xy^2 + e^x \sin y = C$$

(iv)  $\frac{\partial}{\partial y}(ax^2 + 2hxy + by^2) = \frac{\partial}{\partial x}(hx^2 + 2bxy + cy^2) = 2hx + 2by$  であるから完全.

$$\int_0^x (ax^2 + 2hxy + by^2)dx + \int_0^y cy^2 dy = \frac{a}{3}x^3 + hx^2y + bxy^2 + \frac{cy^3}{3}$$

$$\therefore \text{一般解は } ax^3 + 3hx^2y + 3bxy^2 + cy^3 = C$$

(v)  $\frac{\partial}{\partial y}(x\sqrt{x^2 + y^2} - y) = \frac{\partial}{\partial x}(y\sqrt{x^2 + y^2} - x) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1$  であるから完全.

$$\int_0^x (x\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + \int_0^y y^2 dy = \left[ \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2} - yx \right]_0^x + \frac{y^3}{3}. \therefore (x^2 + y^2)^{3/2} - 3xy = C$$

(vi)  $\frac{\partial}{\partial y}(\cos y + y \cos x) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - x \sin y) = -\sin y + \cos x$  であるから完全.

$$\int_0^x (\cos y + y \cos x)dx + \int_0^y 0 dy = x \cos y + y \sin x \therefore x \cos y + y \sin x = C$$

## § 積分因子

微分方程式 :  $(-y + x^2 + y^2)dx + xdy = 0$

は明らかに完全微分方程式でない. しかし, 両辺に  $\frac{1}{x^2 + y^2}$  をかけると,

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} + dx = 0 \text{ で}, \quad d\left(\arctan \frac{y}{x} + x\right) = 0$$

である.  $\therefore$  一般解は  $\arctan \frac{y}{x} + x = -c$  すなわち,  $y = -x \tan(x + c)$  をうる.

例 視察によって次の微分方程式を解け.

$$(i) \quad x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

$$(ii) \quad -ydx + xdy = 0$$

$$(iii) \quad ydx - xdy = 0$$

$$(iv) \quad ydx + xdy = 0$$

$$(v) \quad xdx + ydy = 0$$

$$(vi) \quad (2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$$

$$(vii) \quad ydx - xdy + \log x dx = 0$$

$$(viii) \quad (1+xy)dx + x^2 dy = 0$$

$$(ix) \quad xdy + 2ydx = xydy$$

$$\text{[解]} \quad (i) \quad \text{左辺} = \frac{1}{3}(3x^2dx - 3y^2dy) + (2xydx + x^2dy) = \frac{1}{3}d(x^3 - y^3) + d(x^2y)$$

$$= d\left(\frac{x^3 - y^3 + 3x^2y}{3}\right) \quad \therefore x^3 - y^3 + 3x^2y = C$$

$$(ii) \quad -ydx + xdy = 0 \Leftrightarrow \frac{-ydx + xdy}{x^2} = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \therefore \text{一般解は } \frac{y}{x} = C .$$

$$(iii) \quad ydx - xdy = 0 \Leftrightarrow \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \quad \therefore \text{一般解は } \frac{x}{y} = C$$

$$(iv) \quad ydx + xdy = 0 \Leftrightarrow d(xy) = 0 \quad \therefore xy = C$$

$$(v) \quad xdx + ydy = 0 \Leftrightarrow d(x^2 + y^2) = 0 \quad \therefore x^2 + y^2 = C$$

$$(vi) \quad \text{与式} \Leftrightarrow (2xdx + 2ydy) + (ydx + xdy) = 0 \Leftrightarrow d(x^2 + y^2 + xy) = 0 ,$$

$$\therefore x^2 + y^2 + xy = C$$

$$(vii) \quad -\frac{-ydx + xdy}{x^2} + \frac{\log x}{x^2} dx = 0 \Leftrightarrow d\left(-\frac{y}{x} - \frac{\log x + 1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow y - Cx + \log x + 1 = 0$$

$$(viii) \quad \text{両辺に } x^{-1} \text{ をかける. } \quad ydx + xdy + \frac{1}{x} dx = 0 \Leftrightarrow d(xy + \log x) = 0 \quad \therefore xy + \log x = C$$

$$(ix) \quad \text{両辺に } (xy)^{-1} \text{ をかける. } \quad 2\frac{1}{x} dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0 \Leftrightarrow d(2\log x + \log y - y) = 0$$

$$\therefore x^2 y = C e^y$$

例 視察によって次の微分方程式を解け.

$$(1) \quad (y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0 \quad (\text{両辺に } x^{-1}y^{-2} \text{ をかける})$$

$$(2) \quad xdy - ydx - 2(x^2 + y^2)dx = 0 \quad (\text{両辺に } (x^2 + y^2)^{-1} \text{ をかける})$$

- (3)  $(x^2y - y^2)dx - x^3dy = 0$  (両辺に  $x^{-2}y^{-2}$  をかける)  
(4)  $(x^2 \cos x - y)dx + xdy = 0$  (両辺に  $x^{-2}$  をかける)  
(5)  $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0$  (両辺に  $4x$  をかける)

[解] (1)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \frac{x}{y^2}dy = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx - \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \Leftrightarrow d(\log x - \frac{x}{y}) = 0 \therefore x = Ce^{\frac{-x}{y}}$

(2)  $\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} - 2dx = 0 \Leftrightarrow d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - 2x\right) = 0 \therefore \frac{y}{x} = \tan(2x + C)$

(3)  $-\frac{1}{x^2}dx + \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y}\right) = 0 \therefore \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = C$

(4)  $\cos x dx + \frac{-ydx + xdy}{x^2} = 0 \Leftrightarrow d\left(\sin x + \frac{y}{x}\right) = 0 \therefore \sin x + \frac{y}{x} = C$

(5)  $(12x^4 + 24x^2y + 12xy^2)dx + (8x^3 + 12x^2y)dy = 0$  で、これは完全である。

$$\int_0^x (12x^4 + 24x^2y + 12xy^2)dx = C, \therefore 3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$$

上の幾つかの例からも分かるが、次の事柄（全微分の公式）を念頭に置いておくと便利である。

### 公式

(i)  $d(xy) = ydx + xdy$

(ii)  $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2}$

(iii)  $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

(iv)  $d \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$

(v)  $d \log\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{xy}$

(vi)  $\frac{1}{2}d \log \frac{x+y}{x-y} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 - y^2}$

(vii)  $d \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$

(viii)  $d \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

例 上の公式を念頭において次の微分方程式を解け。

(i)  $x(x-y)y' + y^2 = 0$       (ii)  $y - xy' = x^2y^2 + y'$

(iii)  $(x^2 + y^2)(y - xy') = 2y^2(x + yy')$

[解](i) 与式  $\Leftrightarrow x^2y' = xyy' - y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{xy' - y}{x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \log y = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow y = Ce^{y/x}$

(ii) 与式  $\Leftrightarrow \frac{ydx - xdy}{y^2} = x^2dx + \frac{1}{y^2}dy \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{y}\right) \therefore \frac{x}{y} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{y} + C$

$$(iii) \text{ 与式} \Leftrightarrow \frac{ydx - xdy}{y^2} = 2 \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = 2d\log\sqrt{x^2 + y^2} \therefore \frac{x}{y} = \log C(x^2 + y^2)$$

さて、微分方程式： $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$

が完全微分方程式ではないが、適当な函数  $\lambda(x,y)$  を選んで、

$$\lambda(x,y)p(x,y)dx + \lambda(x,y)q(x,y)dy = 0 \cdots \star$$

完全微分方程式になると、 $\lambda(x,y)$  を  $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$  の積分因子といふ。

そこで、

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda(x,y)p(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x,y)q(x,y))$$

↑

$$q(x,y)\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial x} - p(x,y)\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial y} = \lambda(x,y)\left(\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right) \cdots \star$$

を満たしていかなければならない。そして、

$$d\varphi(x,y) = \lambda(x,y)p(x,y)dx + \lambda(x,y)q(x,y)dy$$

であるような函数  $\varphi(x,y)$  とするとき、 $\varphi(x,y) = C$  が  $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$  の一般解である。積分因子を求めることと、もとの方程式を解くことは同じことである。一般に積分因子を見いだすことは困難なことで、ここでは典型的な場合について紹介する。

例  $y(2x+y)dx + x(2x+3y)dy = 0$  で  $\lambda = x^m y^n$  が積分因子であるように  $m, n$  を決め方程式を解け。

[解] 与式の両辺に  $x^m y^n$  をかける。

$$(2x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2})dx + (2x^{m+2}y^n + 3x^{m+1}y^{n+1})dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2}) = 2(n+1)x^{m+1}y^n + (n+2)x^m y^{n+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x^{m+2}y^n + 3x^{m+1}y^{n+1}) = 2(m+2)x^{m+1}y^n + 3(m+1)3x^m y^{n+1}$$

この二つの式が恒等的に等しいから、 $n+1 = m+2, n+2 = 3(m+1)$  でなければならない。 $\therefore m=0, n=1$ 。

$$(2xy^2 + y^3)dx + (2x^2y + 3xy^2)dy = 0$$

が完全で、 $\int_0^x (2xy^2 + y^3)dx + 0 = x^2y^2 + xy^3, \therefore x^2y^2 + xy^3 = C$

微分方程式： $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$

において、次のような場合に積分因子がみつかる。

$$(I) \quad \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{q} = \Phi(x) \quad (x \text{のみの函数}) \quad \text{のとき},$$

$\lambda = \exp\left(-\int \Phi(x)dx\right)$  が積分因子である。

$$(II) \quad \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} = \Phi(y) \quad (y \text{のみの函数}) \quad \text{のとき},$$

$\lambda = \exp\left(\int \Phi(y)dy\right)$  が積分因子である。

$$(III) \quad \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{xp - yq} = \Phi(xy) \quad (xy \text{のみの函数}) \quad \text{のとき},$$

$\lambda = \exp\left(\int \Phi(xy)d(xy)\right)$  が積分因子である。

$$(IV) \quad x^2 \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{xp + yq} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\frac{y}{x} \text{の函数}) \text{のとき},$$

$\lambda = \exp\left(\int \Phi\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)\right)$  が積分因子である。

$$(V) \quad \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{2(yp - xq)} = \Phi(x^2 + y^2) \quad (x^2 + y^2 \text{の函数}) \text{のとき},$$

$\lambda = \exp\left(\int \Phi(x^2 + y^2)d(x^2 + y^2)\right)$  が積分因子である。

[証明]

$$(I) \quad q(x,y) \frac{\partial \lambda}{\partial x} - p(x,y) \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -q\Phi(x)\lambda = -\lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \text{ で, } \star \text{を満たす.}$$

$$(II) \quad q(x,y) \frac{\partial \lambda}{\partial x} - p(x,y) \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -p\Phi(y)\lambda = -\lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \text{ で, } \star \text{を満たす.}$$

$$(III) \quad u = xy \text{ とし, } \lambda = \exp\left(\int \Phi(u)du\right) \text{ とおくと,}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{d\lambda}{du}, \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{d\lambda}{du} \text{ で, さらに } \lambda' = \Phi(u)\lambda \text{ である.}$$

$$\therefore \frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} p + \lambda \frac{\partial p}{\partial y} = x\lambda' p + \lambda \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} q + \lambda \frac{\partial q}{\partial x} = y\lambda' q + \lambda \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda'(xp - yq) - \lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \Phi(xy)\lambda(xp - yq) - \lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x}. \text{ これは } \lambda = \exp \left( \int \Phi(xy) d(xy) \right) \text{ が積分因子であることを意味する.}$$

注意: 逆に, 次のように考えることもできる.  $\lambda = \lambda(u)$  ( $u = xy$ ) が積分因子であるとする.

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda'(xp - yq) - \lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

$$\text{i.e., } \lambda'(xp - yq) = \lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{xp - yq}, \quad \therefore \lambda = \exp \left( \int \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{xp - yq} d(xy) \right)$$

$$(IV) \quad \lambda = \lambda \left( \frac{y}{x} \right) \left( \frac{y}{x} = u \right) \text{ とおく. これが積分因子とする.}$$

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda' \frac{1}{x} p + \lambda' \frac{y}{x^2} q + \lambda \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{\lambda'}{x^2} (xp + yq) - \lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

$$\text{したがって, } \frac{\lambda'}{\lambda} = x^2 \frac{\left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)}{(xp + yq)}, \quad \therefore \lambda = \exp \left( \int x^2 \Phi \left( \frac{y}{x} \right) d \left( \frac{y}{x} \right) \right)$$

$$(V) \quad \lambda = \lambda(u) \quad (x^2 + y^2 = u) \text{ が積分因子とする.}$$

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda' 2yp - \lambda' 2xq + \lambda \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 2\lambda' (yp - xq) - \lambda \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{2(yp - xq)}, \text{ i.e., } \lambda = \exp \left( \int \Phi(u) du \right), \text{ ここで, } u = x^2 + y^2.$$

例 次の非完全微分方程式を積因数を用いて解け.

$$(i) \quad (3x + 2y)dx + xdy = 0 \quad (ii) \quad (x^2 + y^2)dx + xydy = 0$$

$$(iii) \quad 3(x+y)^2 dx + x(2x+3y)dy = 0 \quad (iv) \quad (2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$$

$$(v) \quad \left(a\sqrt{x^2+y^2} - cx\right)dx + \left(b\sqrt{x^2+y^2} - cy\right)dy = 0$$

[解] (i) 積分因子を  $\lambda = \lambda(x, y)$  とする. ★より  $x\frac{\partial\lambda}{\partial x} - (3x+2y)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda \cdot (2-1)$ .

$\lambda = \lambda(x)$  ( $x$  のみの函数) とすると,  $x\frac{d\lambda}{dx} = \lambda$  で  $\lambda = x$  が積分因子.

$$(3x^2 + 2xy)dx + x^2dy = 0 \text{ は完全で, 一般解は } \int_0^x (3x^2 + 2xy)dx + \int_0^y 0dy = C$$

i.e.,  $x^3 + x^2y = C$  が求めるかいである.

(ii) 積分因子を  $\lambda = \lambda(x, y)$  とする. ★より  $xy\frac{\partial\lambda}{\partial x} - (x^2 + y^2)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda y$

与式を  $y' = -\frac{x^2 + y^2}{xy}$  としておいていまの式に代入する.  $\frac{\partial\lambda}{\partial x} + y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\lambda}{x}$ .

$$\therefore \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y} dy \right) = \frac{dx}{x}, \quad i.e., \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dx}{x}, \text{ ゆえに積分因子は } \lambda = x$$

$$\int_0^x (x^3 + xy^2)dx + \int_0^y 0dy = C \quad \therefore \frac{x^3}{4} + \frac{x^2y}{2} = C, i.e., x^3 + 2x^2y = C \text{ が一般解である.}$$

(iii) 積分因子を  $\lambda = \lambda(x, y)$  とする.

★より  $x(2x+3y)\frac{\partial\lambda}{\partial x} - 3(x+y)^2\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda(2x+3y)$ . 与式を  $y' = -\frac{3(x+y)^2}{x(2x+3y)}$  とかいて

$$\text{この式に代入して, } \frac{\partial\lambda}{\partial x} + y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\lambda}{x}, i.e., \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y} dy \right) = \frac{dx}{x} \quad \therefore \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dx}{x}$$

$$\text{ゆえに積分因子は } \lambda = x \text{ で, 一般解は } \int_0^x 3x(x+y)^2 dx + \int_0^y 0dy = C$$

$$\therefore \text{求める解は } 3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$$

(iv)  $p = 2x^3y^2 - y, q = 2x^2y^3 - x$  とおくと,

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{xp - yq} = \frac{-4xy(x^2 - y^2)}{2x^2y^2(x^2 - y^2)} = -\frac{2}{xy}$$

である. (III)のパターンで, 積分因子  $\lambda = \exp\left(\int\left(-\frac{2}{xy}d(xy)\right)\right) = \frac{1}{x^2y^2}$  をうる.

$$\frac{p}{x^2y^2} = 2x - \frac{1}{x^2y}, \frac{q}{x^2y^2} = 2y - \frac{1}{xy^2} \text{ で,}$$

一般解は  $\int_1^x \left( 2x - \frac{1}{x^2y} \right) dx + \int_1^y \left( 2y - \frac{1}{y^2} \right) dy = C$ , i.e.,  $x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} = C$  をうる.

(v)  $p = a\sqrt{x^2 + y^2} - cx, q = b\sqrt{x^2 + y^2} - cy$  とする.

$$\frac{q_x - p_y}{2(yp - xq)} = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

であるから、積分因子は  $\lambda = \exp\left(\int -\frac{1}{2(x^2 + y^2)} d(x^2 + y^2)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  である.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ を与式の両辺にかけて, } \left( a - \frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \left( b - \frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0$$

$$\therefore \int_0^x \left( a - \frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \int_0^y (b - c) dy = C$$

$$\therefore ax - c\sqrt{x^2 + y^2} + by = C$$

が求める一般解である.