§　微分方程式:$F(x,y,y')=0$ の種々のタイプ

(I) 1 階の高次の微分方程式

微分方程式：$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^n+p_1(x,y)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{n-1}+\cdots+p_{n-1}(x,y)y'+p_n(x,y)y=0$　（$n\geq 2$）

を 1 階の高次の微分方程式という．これが

$$\bigl(y'-q_1(x,y)\bigr)\bigl(y'-q_2(x,y)\bigr)\cdots\bigl(y'-q_n(x,y)\bigr)=0$$

と因数分解されたとする．

$$y'-q_1(x,y)=0, y'-q_2(x,y)=0,\cdots, y'-q_n(x,y)=0$$

のどの微分方程式の解も与えられた方程式の解である．そこで，これらの各方程式の階：

$$f_1(x,y,C)=0, f_2(x,y,C)=0,\cdots, f_n(x,y,C)=0$$

が定まったとき，

$$f_1(x,y,C)\cdot f_2(x,y,C)\cdots f_n(x,y,C)=0$$

が原方程式の一般解である．一般解 $f_j(x,y,C_j)=0$ としたとき，

注意：$y'-q_j(x,y)=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ を解いて，　原方程式の一般解を

$\prod\limits_{j=1}^{n} f_j(x,y,C_j)=0$ と表したとき，見かけ上 n 個の任意定数が含んでいるように見えるが $\prod\limits_{j=1}^{n} f_j(x,y,C_j)=0$ は $f_j(x,y,C_j)=0$ のどれかの式を表すに過ぎないのであるからここに現れる任意定数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ をまとめて C とかいてもよいと考える．

例　　次の微分方程式を解け．

(i)　$x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+3xy\dfrac{dy}{dx}+2y^2=0$

(ii)　$xy'^2+(x^2-1)yy'-xy^2=0$

(iii)　$f(t)=t^n+a_1t^{n-1}+a_2t^{n-2}+\cdots+a_n$　($a_1,\cdots,a_n$ は定数）とする．

$f\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0$ の一般解を求めよ．

[解] (i)　与式は $\left(x\dfrac{dy}{dx}+y\right)\left(x\dfrac{dy}{dx}+2y\right)=0$ とかける．$x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ から $xy-C=0$，$x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ から $x^2y-C=0$ をうる．∴求める一般解は $(xy-C)(x^2y-C)=0$ である．

(ii) $(xy'-y)(y'+xy)=0$ とかけるから， $xy'-y=0$ から $y=Cx$， $y'+xy=0$ から

$y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ をうる．∴一般解:$(y-Cx)(y-Ce^{-\frac{x^2}{2}})=0$ をうる．

(iii) $f(t)=(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n)$ と表すと， $\dfrac{dy}{dx}-\alpha_j=0$ の解は $y-\alpha_j x-C=0$．

$f\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0$ の解は $\prod_{j=1}^{n}(y-\alpha_j x-C)=0$, *i.e.*, $\prod_{j=1}^{n}\left(\dfrac{y-C}{x}-\alpha_j\right)=0$ で

ゆえに，一般解は $f\left(\dfrac{y-C}{x}\right)=0$ と表される．

(II) $F(x,y,y')=0$ が y について解けている場合．すなわち，

$$y=f(x,y')\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表されている場合について考えよう． $y'=p$ とおいて

$$y=f(x,p)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表しておいて，両辺を微分する．

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\Leftrightarrow\frac{dp}{dx}=\frac{p-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}\quad\left(\quad\text{これを}F(x,p)\text{とおく}\quad\right)$$

$$\therefore\frac{dp}{dx}=F(x,p)\ \text{（正規形）}$$

の形にかける．これを解いて，

$$\varphi(x,p,C)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

②，③から p を消去して x,y の関係式 $G(x,y,C)=0$ が原方程式の一般解である．

例　次の微分方程式を解け．

（i） $xy'^2-2yy'+4x=0$　　(ii) $2y'^2-2x^2y'+3xy=0$

［解］（i） $y'=p$ とおく．

$$y=\frac{p^2+4}{2p}x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

両辺を微分して，

$$p=\frac{p^2+4}{2p}+\frac{p^2-4}{2p^2}\frac{dp}{dx}x\Leftrightarrow p(p^2-4)=(p^2-4)\frac{dp}{dx}x$$

そこで， $p^2-4\neq 0$ とすると， $\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{p}{x}\Leftrightarrow p=C'x$ （C' は任意定数）をうる．

これを上の②に代入すると，

$$\text{一般解：}\ y = Cx^2 + \frac{1}{C} \qquad \left(C = \frac{C'}{2} \right)$$

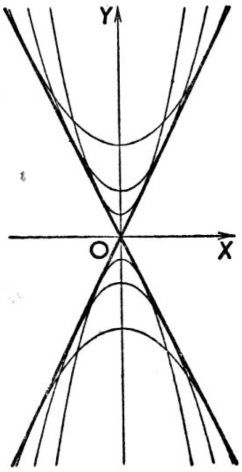
が得られる．

$p^2 - 4 = 0$ のとき， $p = \pm 2$ すなわち， $y = \pm 2x$ も解である．これは一般解からは得られない解である．いわゆる特異解である．

特異解（直線）： $y = \pm 2x$ は

一般解（放物線群）： $y = Cx^2 + \dfrac{1}{C}$

の包絡線である．



(ii)　与式は $y = \dfrac{2xp}{3} - \dfrac{2}{3}\dfrac{p^2}{x}$ とかける，両辺を微分すると，

$$p = \frac{2p}{3} + \frac{2x}{3}\frac{dp}{dx} + \frac{2}{3}\frac{p^2}{x^2} - \frac{4}{3}\frac{p}{x}\frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \frac{1}{3x^2}\left(2p - x^2\right)\left(p - 2x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{2}x^2 \text{ または}, \frac{dp}{dx} = \frac{p}{2x}$$

前者を与式に代入すると， $y = \dfrac{x^3}{6}$ をうる．また後者から $\therefore p = c\sqrt{x}$ でこれを与式に代入すると，一般解： $y = \dfrac{2xc\sqrt{x}}{3} - \dfrac{2}{3}\dfrac{c^2 x}{x} = \dfrac{2c(x\sqrt{x} - c)}{3}$ をうる，明らかに $y = \dfrac{x^3}{6}$ が特異解である．

(II)′　$y = f(y')$ と表されているとき

$y' = p$ とおくっと， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dp}\dfrac{dp}{dx}$ と考えて

$$p = f'(p)\frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \int dx = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C \Leftrightarrow x = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C$$

をうる．そして， $y = f(p)$ から p を消去する． p を parameter として

$$\begin{cases} y = f(p) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(p)}{p}dp + C \end{cases}$$

と表す.

例　$y = y'\cos y' - \sin y'$ を解け.

［解］$y' = p$ とおくと，$y = p\cos p - \sin p$．$p = (\cos p - p\sin p - \cos p)\dfrac{dp}{dx}$ で,

$$p = -p\sin p\frac{dp}{dx}$$

をうる．$p \neq 0$ とするとき，$x = -\int \sin p dp + C = \cos p + C$

$$\begin{cases} y = p\cos p - \sin p \\ x = \cos p + C \end{cases}$$

が一般解である．$p = 0$ のとき, 特異解 $y = 0$（原方程式で，$p = 0$ を代入）をうる.

（III）　$F(x, y, y') = 0$ が x について解けている場合．すなわち,

$$x = f(y, y') \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表されている場合について考えよう．そこで，$p = \dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}$ と考えて，①で，x を y の函数と考えて両辺を微分する.

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial p}}\left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \left(\text{これを } G(y, p) \text{ とする} \right)$$

$$\frac{dp}{dy} = G(y, p) \text{（正規形）}$$

となる．これを解いて

$$\varphi(y, p, C) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が得られ，①，③から p を消去して一般解が得られる.

$$\text{parameter 表示：} \begin{cases} x = f(y, p) \\ \varphi(y, p, C) = 0 \end{cases}$$

で表す.

例　次の微分方程式を解け.

　(i)　$y'^3 + xy' - y = 0$　　　(ii)　$9yp^2 - 2xp + y = 0$　（$y' = p$）

［解］(i)　$y' = p$ とおくと, 与式は $x = \dfrac{y}{p} - p^2$ とかける．両辺を y で微分すると,

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p}+\left(-\frac{y}{p^2}-2p\right)\frac{dp}{dy}\Leftrightarrow\left(\frac{y}{p^3}+2\right)\frac{dp}{dy}=0$$

をうる．$\dfrac{dp}{dy}=0$ または $\dfrac{y}{p^3}+2=0$ で，前者から $p=c$，与式にもどって，

$y=cx+c^3$（c は定数）をうる．また後者から $2p^3+y=0$ がでる．この式と原方程式 $p^3+xp-y=0$ とから p を消去すると，$4x^3+27y^2=0$ をうる．これが特異解である．

注意：$p^3+xp-y=0$，$2p^3+y=0$ の p についての多項式とみて終結式を計算すると直ちに $4x^3+27y^2=0$ をうる．

(ii) 与式は $2x=y\dfrac{9p^2+1}{p}$ とかける．両辺を y で微分すると,

$$\frac{2}{p}=\frac{9p^2+1}{p}+y\left(9-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}\Leftrightarrow\frac{1}{p}-9p=y\left(9-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$\dfrac{1}{p}-9p\neq 0$ とすると，上の方程式は $1=-\dfrac{y}{p}\dfrac{dp}{dy}$ となる．これを解くと，$yp=C$ をうる．これを与式に代入して p を消去すると，

$$9C^2-2Cx+y^2=0 \qquad \text{（一般解）}$$

をうる．$\dfrac{1}{p}-9p=0$ のとき，$p=\pm\dfrac{1}{3}$ で，これを与式に代入して，

$$y=\pm\frac{1}{3}x \qquad \text{（特異解）}$$

をうる．

(III)′　$x=f(y')$（y' のみの函数）の場合

$x=f(p)$（$y'=p$）で，両辺を y で微分すると，$\dfrac{1}{p}=f'(p)\dfrac{dp}{dy}$ で，一般解は

$$\text{parameter 表示：}\begin{cases}x=f(p)\\ y=\int pf'(p)dp+C\end{cases}$$

と表される．

例　次の微分方程式を解け．

(i)　$2x=3p^2$　（$y'=p$）　(ii)　$x=2p+\sin p$　（$y'=p$）

［解］(i) 両辺をyで微分すると，$\dfrac{2}{p}=6p\dfrac{dp}{dy}$． $\therefore y+c=p^3$．ここからpを消去して一般解$8x^3=27(c+y)^3$をうる．

(ii) $\dfrac{1}{p}=(2+\cos p)\dfrac{dp}{dy}$.$\therefore y=\int(2p+p\cos p)dp+C$

parameter 表示：$\begin{cases} y=p^2+p\sin p+\cos p+C \\ x=2p+\sin p \end{cases}$

が求める一般解である．

(IV) ダランベール・ラグランジュの微分方程式

$$y=xf(p)+g(p)\quad(y'=p)$$

を d'Alembert ・ Lagrange の微分方程式という．両辺をxで微分する．

$$p=f(p)+\{xf'(p)+g'(p)\}\frac{dp}{dx}\Leftrightarrow\{xf'(p)+g'(p)\}\frac{dp}{dx}+f(p)-p=0$$

$f(p)-p\neq 0$のとき， pを独立変数とし$x=x(p)$と考えると，

$$\frac{dx}{dp}+\frac{f'(p)}{f(p)-p}x+\frac{g'(p)}{f(p)-p}=0$$

なる函数$x=x(p)$についての線形微分方程式を考えることになる．すなわち線形微分方程式の扱いに帰着する．

これを解いて解：$x=G(p)$が得られたら，この解と与式からpを消去したのがわれわれが求める解である．

$f(p)-p=0$のとき，この解をp_0とすると， $y=p_0x+g(p_0)$が解である．なぜならば，与式の戻って， $y=xf(p_0)+g(p_0)$である．

例　次の微分方程式を解け．

(i) $y=2xp+p^2$ ($y'=p$)　　　(ii) $y=xp^2+p^2-2p$ ($y'=p$)

［解］(i) 両辺を微分して,$p=2p+2x\dfrac{dp}{dx}+2p\dfrac{dp}{dx}\Leftrightarrow\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{2}{p}x=-2$であるから，

$$x=\exp\left(-\int\frac{2}{p}dp\right)\left\{C+\int(-2)\exp\left(\int\frac{2}{p}dp\right)dp\right\}=\frac{1}{p^2}\left(-\frac{2}{3}p^3+C\right),i.e.,3p^2x+2p^3=C$$

が得られ，与式を使ってpを消去すると， $(xy+C)^2=4(x^2+y)(y^2-Cx)$をうる．

$p=0$のとき， $y=0$が得られる．一般解で$C=0$とすれば$y=0$がれられる．

これは１つの特殊解である．

注意：$f(p)=2p^3+3p^2x-C,g(p)=p^2+2px-y$とするとき，$f(p)=0,g(p)=0$から

pを消去するには次の終結式（線形代数学）を計算すればよいことに注意.

$$R(f(p),g(p))=\begin{vmatrix}2 & 3x & 0 & -C & 0\\ 0 & 2 & 3x & 0 & -C\\ 1 & 2x & -y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x & -y & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2x & -y\end{vmatrix}=-4y^3+4x^3C-3x^2y^2+6xyC+C^2=0$$

(ii) 両辺を微分して,

$$p=p^2+(2xp+2p-2)\frac{dp}{dx}\Leftrightarrow(p^2-p)\frac{dx}{dp}+2px=-2(p-1)$$

$p^2-p\neq 0$のとき, $\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{2}{p-1}x=-\dfrac{2}{p}$

なる1階線形微分方程式を解けばよい.

$$x=\exp\left(-\int\frac{2}{p-1}dp\right)\left\{C+\int\left(-\frac{2}{p}\right)\exp\left(\int\frac{2}{p-1}dp\right)dp\right\}$$

$$\therefore x=\frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^2+4p-2\log p+C\right)$$

∴解の parameter 表示：$\begin{cases}y=xp^2+p^2-2p\\ x=\dfrac{1}{(p-1)^2}\left(-p^2+4p-2\log p+C\right)\end{cases}$

をうる.

$p^2-p=0$のとき, $p=0,p=1$で, 特異解$y=0,y=x-1$をうる.

(IV)′ クレローの微分方程式

微分方程式: $y=xp+g(p)$ （$y'=p$）

をクレロー(Clriraut)の微分方程式という. 与式の両辺を微分すると,

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx}\Leftrightarrow\left(x+g'(p)\right)\frac{dp}{dx}=0$$

$\therefore \dfrac{dp}{dx}=0$または$x+g'(p)=0$である. そこで前者から$p=C,y=xC+g(C)$が得られる. ここで$C$は任意の定数である. 後者を

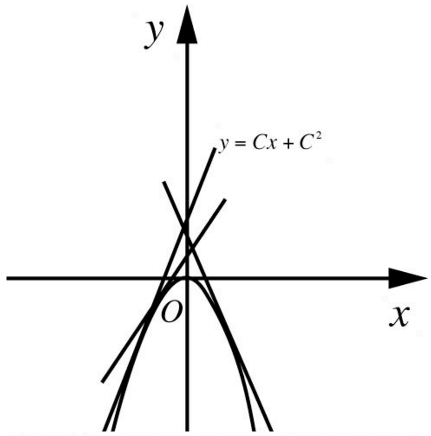
$$\begin{cases}x=-g'(p) & \cdots\cdots\cdots(1)\\ y=xp+g(p) & \cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

と考えて，この式から p を消去したのが特異解である．

例　次の微分方程式を解け．

(i)　$y = xp + p^2$　($y' = p$)　　(ii)　$y = xp + \sqrt{1+p^2}$　($y' = p$)

［解］(i)　$(x+2p)\dfrac{dp}{dx} = 0$ を考えればよい．∴一般解は $y = Cx + C^2$（C は任意定数)である．そして，特異解として，$x = -2p, y = xp + p^2$ から p を消去したものであるから，$y = -\dfrac{1}{4}x^2$ である．

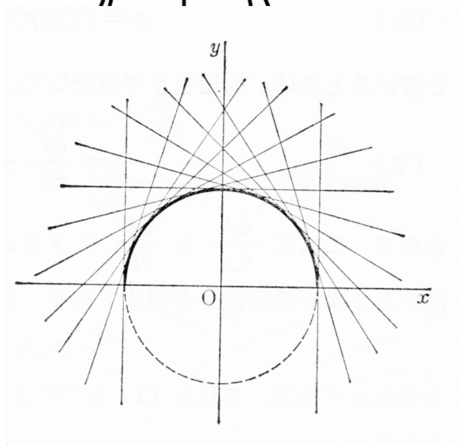


一般解と特異解との幾何学的な関係について考察しよう．

特異解（放物線）：$y = -\dfrac{1}{4}x^2$ は

一般解（直線群）：$y = Cx + C^2$ の

包絡線である．右の図を参照



(ii) クレローの微分方程式であるから

一般解は $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$ である．

$$x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, y = xp + \sqrt{1+p^2}$$

から p を消去する．

$$y = xp + \sqrt{1+p^2} = - - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{p^2+1}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} > 0$$

∴特異解は半円：$x^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$) である．そして特異解(半円：$x^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$))は一般解（直線群）の $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$ の包絡線である．

(V)　微分方程式を parameter 表示する方法

(1°)　$f(y, y') = 0$（x を陽に含まない）

$$y = \varphi(u), y' = \psi(u)$$

と parameter u を用いて表された場合について考察する.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\varphi'(u)\frac{du}{dx} \quad \text{であるから} \quad \varphi'(u)\frac{du}{dx}=\psi(u)$$

$$x=\int\frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}du+C$$

とかける. ゆえに

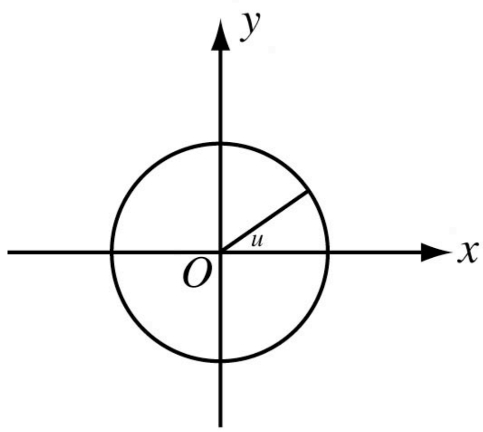
$$\begin{cases} y=\varphi(u) \\ x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}du+C \end{cases}$$

から u を消去したのが一般解である.

例　次の微分方程式を解け.

(i) $y'^2+y^2=a^2$ $(a>0)$　(ii) $y^2(1+y'^2)=a^2$ $(a>0)$

［解］(i) 与式を $y'=a\cos u, y=a\sin u$ と表す



$$\frac{dy}{dx}=(a\cos u)\frac{du}{dx}=a\cos u$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=1 \text{ または } \cos u=0$$

前者から, $x=u+C, \therefore y=\sin(x-C)$

後者から $u=\dfrac{\pi}{2}\pm 2n\pi, \dfrac{3\pi}{2}\pm 2n\pi$,

すなわち,「$y=\pm a$ (特異解)をうる.

(ii) $y=a\sin u, yy'=a\cos u$ と parameter u を用いて表される. すなわち, $y=a\sin u, y'=\cot u$ とかける.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=a\cos u\frac{du}{dx}=\frac{a\cos u}{y}=\cot u$$

で, $\cos u\neq 0$ として,

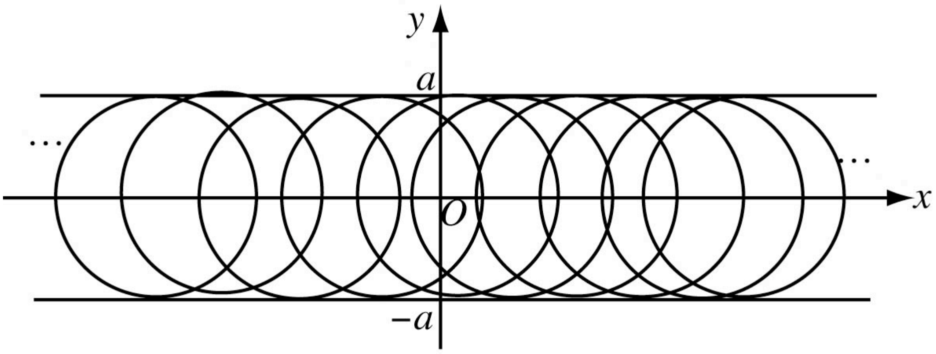
$$x=\int\frac{a\cos u}{\cot u}du+C=\int a\sin u du+C=-a\cos u+C$$

をうる. そこで,

$$\begin{cases} y=a\sin u \\ x=-a\cos u+C \end{cases}$$

から u を消去して一般解: $(x-C)^2+y^2=a^2$ をうる. $\cos u=0$ のと, $y=\pm a$ (特異解)を

うる.



特異解（直線）は一般解（円の族）の包絡線である

(2°)　$f(x,y')=0$（yを陽に含まない）

$$x=\varphi(u),\ y'=\psi(u)$$

とparameter uを用いて表された場合について考察する.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{du}\frac{du}{dy}=\varphi'(u)\frac{du}{dy}\quad\left(=1/\frac{dy}{dx}\right),\ \therefore \varphi'(u)\frac{du}{dy}=\frac{1}{\psi(u)}$$

$$\therefore y=\int\varphi'(u)\psi(u)du+C$$

が得られる. そしてこの式と$x=\varphi(u)$かuを消去して一般解が得られる.

例　次の微分方程式を解け.

(i)　$x^2-axy'+y'^3=0$　　　(ii)　$y'^2-y'^3=x^2$

[解] (i)　$x=y'u$とおく. 与式は$y'^2u^2-ay'^2u+y'^3=0$とかける. したがって,

$$x=\varphi(u)=au^2-u^3,\ y'=\psi(u)=au-u^2$$

を考えればよい.

$$y=\int\varphi'(u)\psi(u)du+C=\int(au^2-u^3)'(au-u^2)du+C=\frac{3}{5}u^5-\frac{5}{4}au^4+\frac{2}{3}a^2u^3+C$$

これと$x=au^2-u^3$からuを消去する

終結式: $R\left((au^2-u^3)-x,\left(\frac{3}{5}u^5-\frac{5}{4}au^4+\frac{2}{3}a^2u^3+C\right)-y\right)$を計算して,

$$y^3-\left(\frac{a^5}{60}+3C\right)y^2+\left(-\frac{9a}{20}x^3-\frac{a^4}{120}x^2+\frac{a^5}{30}+3C^2\right)y$$
$$+\left\{\frac{27}{125}x^5-\frac{7a^3}{1600}x^4+\left(\frac{9aC}{20}+\frac{a^6}{135}\right)x^3+\frac{a^4C}{120}x^2-\frac{a^5C^2}{60}-C^3\right\}=0$$

が一般解である.

(ii) $x = y'u$ とおく. $y'^2 - y'^3 = y'^2u^2 \Leftrightarrow y'^2(u^2 - 1 + y') = 0$ であるから,
$y' \neq 0$ であるから, $x = \varphi(u) = (1-u^2)u,\ y' = \psi(u) = 1-u^2$ と parameter 表示される.

$$\therefore y = \int \varphi'(u)\psi(u)du + C = \int (u-u^3)'(1-u^2)du + C = \frac{3}{5}u^5 - \frac{4}{3}u^3 + u + C$$

$x = (1-u^2)u$ と $y = \dfrac{3}{5}u^5 - \dfrac{4}{3}u^3 + u + C$ から u を消去して, 一般解

$$y^3 - (x+3C)y^2 + \left(-\frac{4}{15}x^2 + 2Cx + 3C^2 - \frac{16}{225}\right)y$$

$$+\left\{\frac{27}{125}x^5 + \frac{164}{675}x^3 + \frac{4C}{15}x^2 + \left(-C^2 + \frac{16}{225}\right)x + \left(-C^3 + \frac{16}{225}\right)\right\} = 0$$

をうる.

(3°) $f\left(\dfrac{y}{x}, y'\right) = 0$ (x, y の同次形)

$\dfrac{y}{x} = \varphi(u), y' = \psi(u)$ すなわち,

parameter 表示: $\begin{cases} y = x \cdot \varphi(u) \\ y' = \psi(u) \end{cases}$

されたとする.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \varphi(u) + x\varphi'(u)\frac{du}{dx} \quad (= \psi(u))$$

$$\therefore \int \frac{\varphi'(u)}{\psi(u) - \varphi(u)}du = \int \frac{dx}{x} + C \Leftrightarrow x = C\exp\left(\int \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)-\varphi(u)}du\right)$$

例　次の微分方程式を解け

(i) $yy'^2 + 2xy' - y = 0$　(ii) $(1+y')^2 - \left(4 + 2\dfrac{y}{x}\right)(1+y') + \dfrac{y^2}{x^2} = 0$

[解] (i) $y' = u$ とおくと,

$$\frac{y}{x} = \frac{2u}{1-u^2}, i.e., y = x\frac{2u}{1-u^2}$$

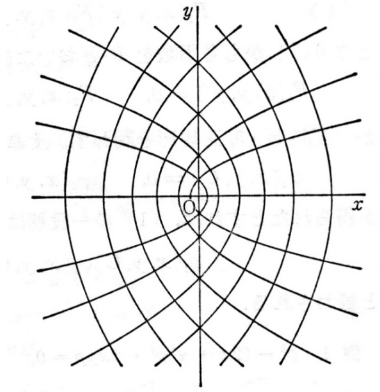
と表される.

$$\log x = \int \frac{\varphi'(u)}{\psi(u) - \varphi(u)}du + C = \int \frac{\left(\dfrac{2u}{1-u^2}\right)'}{u - \dfrac{2u}{1-u^2}}du + C == \int \frac{2}{u(u^2-1)}du + C$$

$$= \int\left(-\frac{2}{u}+\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u-1}\right)du + C = \log C\frac{u^2-1}{u^2}$$

$$\therefore x = C\frac{u^2-1}{u^2},\ y = \frac{2C}{u}.$$

uを消去して，一般解：$y^2 = 4C(x+C)$をうる．これは右図のような放物線群である．



(ii)　$1+y' = u^2, \dfrac{y}{x} = v$ としてみよう．与式の代入すると，$u^4-(4+2v)u^2+v^2=0$ であることから，$v = u^2+2u$ で，原微分方程式は

$$\frac{y}{x} = \varphi(u) = u^2+2u, y' = \psi(u) = u^2-1$$

と parameter 表示されることがわかる．$y = x(u^2+2u)$ から

$$y' = (u^2+2u)+2x(u+1)\frac{du}{dx}, \therefore u^2-1 = (u^2+2u)+2x(u+1)\frac{du}{dx} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{2(u+1)}{2u+1}\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \int\frac{2(u+1)}{2u+1}du = -\log x + C \Leftrightarrow u+\frac{1}{2}\log(2u+1)+\log x = C$$

$$\therefore x = C\frac{e^{-u}}{\sqrt{2u+1}}$$ で，一般解は $y = C\dfrac{(u^2+2u)e^{-u}}{\sqrt{2u+1}}$ と表される

§　高階微分方程式の解法

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}) = 0 \quad (n \geq 2)$$

を高階微分方程式という．

1°　$F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)}) = 0$（$y$を陽に含まない場合）

$y' = p$とおくと，

$$F(x,p,p',\cdots,p^{(n-1)}) = 0$$

となる．微分の階数を 1 下げることができる．たとえば，

$$F(x,y',y'') = 0$$

を考えよう．この方程式は

$$F(x,p,p') = 0$$

となる．これを解いて

$$p = \varphi(x,C_1)$$

が得られると，

$$\text{一般解}: y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2 \quad (C_1,C_2\text{は任意定数})$$

が得られる.

例　次の微分方程式を解け.

(i)　$x^2y''=2xy'+x^2$　(ii)　$(x+1)y''-2y'=(x+1)^4$

[解] (i)　$y'=p$とおくと, $x^2p'=2xp+x^2$すなわち$p'-\dfrac{2}{x}p=1$であるから,

$$p=\exp\left(\int\frac{2dx}{x}\right)\left\{C_1+\int 1\cdot\exp\left(-\int\frac{2dx}{x}\right)dx\right\}=x^2\left(C_1-\frac{1}{x}\right)=C_1x^2-x$$

$$\therefore y=\int\left(C_1x^2-x\right)dx=C_1x^3-\frac{1}{2}x^2+C_2 \quad (C_1,C_2\text{は任意定数})$$

(ii)　$y'=p$とおくと, $(x+1)p'-2p=(x+1)^4$で, $p'-\dfrac{2}{x+1}p=(x+1)^3$であるから,

$$p=\exp\left(2\int\frac{dx}{x+1}\right)\left\{C_1+\int(x+1)^3\exp\left(-\int\frac{2dx}{x+1}\right)dx\right\}=(x+1)^2\left\{C_1+\int(x+1)dx\right\}$$

$$=C_1(x+1)^2+\frac{(x+1)^4}{2}$$

$$\text{一般解}: y=\frac{1}{10}(x+1)^5+C_1(x+1)^3+C_2 \quad (C_1,C_2\text{は任意定数})$$

をうる.

$1^{\circ\prime}$　$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$ ($y,y',\cdots,y^{(k-1)}$を陽に含まない場合)

$y^{(k)}=p$とおくと,

$$F(x,p,p',\cdots,y^{(n-k)})=0$$

を解けばよい.

例 次の微分方程式を解け.

(i)　$x^2y'''=y''^2$　(ii)　$xy'''+y''=12x$

[解] (i)　$y''=p$とおくと, 与式は$x^2p'=p^2$とかける.

$$\therefore\int\frac{dp}{p^2}=\int\frac{dx}{x^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{p}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{C_1}\Leftrightarrow p=\frac{C_1x}{x+C_1}$$

$$y'=\int pdx=\int\frac{C_1x}{x+C_1}dx=C_1x-C_1{}^2\log(x+C_1)+C_2$$

$$y=\int y'dx=\frac{C_1}{2}x^2-{C_1}^2\log(x+C_1)-{C_1}^3\log(x+C_1)+{C_1}^3+C_2x+C_3$$

(ii) $y''=p$ とおくと，与式は $p'+\dfrac{1}{x}p=12$ とかける．

$$p=\exp\left(-\int\frac{dx}{x}\right)\left\{C_1+\int 12\exp\left(\int\frac{dx}{x}\right)dx\right\}=\frac{C_1}{x}+6x$$

$$\therefore y'=\int\left(\frac{C_1}{x}+6x\right)dx=3x^2+C_1\log x+C_2$$

$$\therefore y=\int\left(3x^2+C_1\log x+C_2\right)dx=x^3+C_1(x\log x-x)+C_2x+C_3$$

ここで，C_1,C_2,C_3 は任意の定数である．

2° $F(y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$ （独立変数 x を陽に含まない場合）

$y'=p$ とおくとき，

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=\frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy}+p\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}=p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p\frac{d^2p}{dy^2}\right)$$

$$y^{(4)}=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^3+2p\frac{dp}{dy}\frac{d^2p}{dy^2}\frac{dy}{dx}+2p\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{d^2p}{dy^2}+p^2\frac{d^3p}{dy^3}\frac{dy}{dx}$$

$$=p\left\{\left(\frac{dp}{dy}\right)^3+4p\frac{dp}{dy}\frac{d^2p}{dy^2}+p^2\frac{d^3p}{dy^3}\right\}$$

$$\vdots$$

であるから，我々の微分方程式は

$$F\left(y,p,p\frac{dp}{dy},p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p\frac{d^2p}{dy^2}\right),p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right)^3+4p\frac{dp}{dy}\frac{d^2p}{dy^2}+p^2\frac{d^3p}{dy^3}\right),\cdots\right)=0$$

となる．すなわち微分の階数を 1 下げることができた．

特に

$$F(y,y',y'')=0$$

を考察しよう．上で述べたことから，

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

を解けばよい．そこでこの方程式の解を $p = \varphi(y, C_1)$ とすると，

$$p = \varphi(y, C_1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2 \qquad （C_1, C_2 \text{ は任意の定数}）$$

と解くことができる．

例　次の微分方程式を解け．

(i)　$y''y = 2y'^2$　(ii)　$y'y''' - 2y''^2 - y'y'' = 0$

[解] (i) $y' = p$ とおくと，与式は $p\dfrac{dp}{dy}y = 2p^2$ となる．

$$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y} + C_1 \Leftrightarrow p = C_1 y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = C_1 \int dx + C_2$$

$\therefore -\dfrac{1}{y} = C_1 x + C_2$ であるから，一般解は $y = \dfrac{1}{Ax + B}$ （A, B は任意定数)とかける．

(ii)　$y' = p$ とおくと，与式は

$$pp'' - 2p'^2 - pp' = 0$$

で，さらに $p' = \dfrac{dp}{dx} = q$ とおくと，$p'' = \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{dq}{dp}\dfrac{dp}{dx} = q\dfrac{dq}{dp}$ であるから，

$$pq\frac{dq}{dp} - 2q^2 - pq = 0$$

となる．$pq \neq 0$ として，両辺をこれで割ると，

$$\frac{dq}{dp} - \frac{2}{p}q = 1$$

が得られる．

$$\therefore q = \exp\left(2\int \frac{dp}{p}\right)\left\{C_1 + \int 1 \cdot \exp\left(-2\int \frac{dp}{p}\right)dp\right\} = p^2\left(C_1 - \frac{1}{p}\right) = C_1 p^2 - p$$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = p(C_1 p - 1), \quad \int \frac{dp}{p(C_1 p - 1)} = x + C_2, \log\frac{C_1 p - 1}{p} = x + C_2$$

$$\therefore \frac{C_1 p - 1}{p} = C_2 e^x \Leftrightarrow p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C_1 - C_2 e^x} \Leftrightarrow y = \int \frac{1}{C_1 - C_2 e^x}dx + C_3$$

$$\text{一般解：}\ y=-\frac{1}{C_1}\int\frac{-e^{-x}}{C_1e^{-x}-C_2}dx+C_3=-\frac{1}{C_1}\log\left(C_1e^{-x}-C_2\right)+C_3$$

をうる．$p=0$ のとき，すなわち，$\dfrac{dy}{dx}=0$ のtき．$y=C_4$（定数）をうる．$q=0$ のとき，$p=C_5$（定数）で，$y=C_5x+C_6$ が得られる. これらは一般解の中に含まれる.
前者は$C_1\to\infty$後者は$C_2=0$と考えればよい.

$2^{\circ\prime}$ $F(y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$ （ $k\geq 2$, $x,y,y',\cdots,y^{(k-1)}$を陽に含まれない場合）

$y^{(k)}=p$とおくと,

$$F(p,p',\cdots,y^{(n-k)})=0\quad(\,n\geq k\,)$$

を扱えばよい.

$$p'=q\text{とおくと，}\ p''=\frac{dq}{dp}\frac{dp}{dx}=q\frac{dq}{dp},p'''=q\left(q\frac{d^2q}{dp^2}+\left(\frac{dq}{dp}\right)^2\right),\cdots$$

であるから,

$$F\left(p,q,q\frac{dq}{dp},q\left(q\frac{d^2q}{dp^2}+\left(\frac{dq}{dp}\right)^2\right),\cdots\right)=0$$

を扱えばよい.
例　$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$を解け.
[解] $y'=p$とおくと, 与式は$p''(1+p^2)-3pp'^2$とかける. さらに，$p'=q$とおくと,

$$q\frac{dq}{dp}(1+p^2)=3pq^2$$

をうる． $q\neq 0$ として,

$$\int\frac{dq}{q}=\int\frac{3p}{1+p^2}dp+C_1\Leftrightarrow\log q=\log(1+p^2)^{3/2}+C_1\Leftrightarrow\frac{dp}{dx}=C_1(1+p^2)^{3/2}$$

$$\therefore C_1\int(1+p^2)^{-3/2}dp=x-C_2,\therefore C_1\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=x-C_2$$

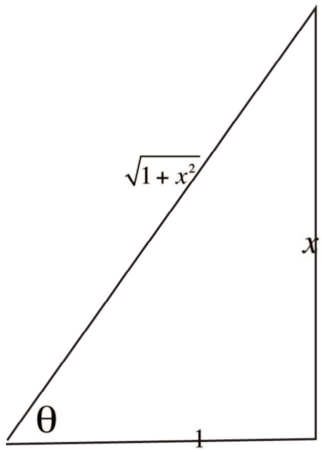
$$\therefore p^2=\frac{(x-C_2)^2}{C_1-(x-C_2)^2}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x-C_2}{\sqrt{C_1-(x-C_2)^2}}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{C_1-(x-C_2)^2}+C_3$$

改めて任意定数を置き換えると,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

が得られる． $q=0$ のときは $y=Ax+B$ が解で $r=\infty$ としたときと考えればこれも上の解に含まれるとみなせる．

注意：$I=\int\dfrac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ の計算．



$x=\tan\theta$ と置換． $\dfrac{dx}{d\theta}=1+\tan^2\theta$ である．

$$I=\int\frac{1}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{3/2}}\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta=\int\frac{d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$=\int\cos\theta d\theta=\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

3° 広義の同次形の微分方程式

微分方程式：$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$

が広義の同次形の微分方程式であるとは，定数 λ,μ,r を適当に選んだとき，

$$F(c^\lambda x,c^\mu y,c^{\mu-\lambda}y',\cdots,c^{\mu-n\lambda}y^{(n)})=c^rF(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$

が成立が成立する場合をいう．

いま，$x=c^\lambda\xi,y=c^\mu\eta$ （$c>0$）と変換する．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=c^\mu\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\cdot c^{-\lambda}=c^{\mu-\lambda}\frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=c^{\mu-\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)=c^{\mu-\lambda}\cdot\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)\cdot\frac{d\xi}{dx}=c^{\mu-2\lambda}\cdot\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=c^{\mu-2\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)=c^{\mu-2\lambda}\frac{d}{d\xi}\cdot\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{dx}=c^{\mu-3\lambda}\cdot\frac{d^3\eta}{d\xi^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=c^{\mu-(n-1)\lambda}\cdot\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d^{n-1}\eta}{d\xi^{n-1}}\right)\cdot\frac{d\xi}{dx}=c^{\mu-n\lambda}\cdot\frac{d^n\eta}{d\xi^n}$$

であるから，

$$F\left(c^\lambda\xi,c^\mu\eta,c^{\mu-\lambda}\frac{d\eta}{d\xi},\cdots,c^{\mu-n\lambda}\cdot\frac{d^n\eta}{d\xi^n}\right)=c^rF(\xi,\eta,\eta',\cdots,\eta^{(n)})=0$$

すなわち，x,y の代わりに $c^\lambda x,c^\mu y$ とおいても微分方程式の形は不変であることを意味する．

（I） $\lambda=0,\mu=1$ の場合

$$c^{-r}F(x,cy,cy',\cdots,cy^{(n)})=F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$

となる．このときに y ついて同次であるという．c は任意であるから，$c=y^{-1}$ とすると，

$$y^{-r}F\left(x,\frac{1}{y},\frac{y'}{y},\cdots,\frac{y^{(n)}}{y}\right)=F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$

となる．これは微分方程式を

$$F\left(x,\frac{1}{y},\frac{y'}{y},\cdots,\frac{y^{(n)}}{y}\right)=0$$

と直せることを意味する．このとき更に，$y=e^{z}$ と変換すると，

$$y'=e^{z}z',\ y''=e^{z}(z'^{2}+z''),\ y'''=e^{z}(z'^{3}+3z'z''+z'''),\cdots$$

であるから，

$$F(x,1,z',z'^{2}+z'',z'^{3}+3z'z''+z''',\cdots)=0$$

であるような方程式になる．これは従属変数 z が陽に含まれない方程式に帰着したことを示している．

例　$yy''-y'^{2}-6xy^{2}=0$ を解け．

［解］両辺に y^{-2} をかけると，

$$\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^{2}-6x=0 \qquad \left(F\left(x,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y}\right)=0\ \text{タイプの方程式} \right)$$

となる．$y=e^{z}$ と変換して，

$$e^{z}\left\{e^{z}(z'^{2}+z'')\right\}-\left(e^{z}z'\right)^{2}-6x\left(e^{z}\right)^{2}=0 \Leftrightarrow z''-6x=0$$

$\therefore z'=3x^{2}+C_{1},\ z=x^{3}+C_{1}x+C_{2}$ （C_{1},C_{2} は任意の定数）

$\therefore$ 一般解：$y=\exp(x^{3}+C_{1}x+C_{2})$ をうる．

（II）$\lambda=1,\mu=0$ の場合

$$c^{-r}F(cx,y,c^{-1}y',\cdots,c^{-n}y^{(n)})=F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$

となる．この場合 x について同次な微分方程式という．c は任意であるから，$c=x^{-1}$ とおくことにしよう．

$$x^{-r}F(1,y,xy',\cdots,x^{n}y^{(n)})=F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$

となるから，したがって，

$$F(1,y,xy',\cdots,x^{n}y^{(n)})=0$$

を考察すればよい．x が陽に含まれないタイプの方程式に帰着する．

$x=e^{t}$ と変換すると，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^{-t}-\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot e^{-t}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t}$$
$$\vdots$$

となる.

$$xy'=\frac{dy}{dt},\,x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},\cdots$$

である.

$F\left(1,y,\dfrac{dy}{dt},\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt},\cdots\right)=0$ （独立変数tを陽に含まれないタイプの方程式）

に帰着する.

例　$xy^2y''+y'(1+y^2)=0$を解け.

［解］ $F(cx,y,c^{-1}y',c^{-2}y'')=c^{-1}F(x,y,y',y'')$であることに注意.

$x=e^t$と変換

$$e^ty^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t}+\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}(1+y^2)=0\Leftrightarrow\left\{y^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}(1+y^2)\right\}=0$$

$\therefore y^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}=0$ （独立変数tを陽に含まれない）

そこで，$\dfrac{dy}{dt}=p$とおくと，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dt}=p\dfrac{dp}{dy}$より，$y^2\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)+p=0$.

$\therefore y^2\dfrac{dp}{dy}=-1$または$p=0$をうる.

前者から，$\int dp=-\int\dfrac{dy}{y^2},\,p=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{C_1}$で，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y+C_1}{yC_1},\int\dfrac{C_1ydy}{y+C_1}=t+C_2$

であるから一般解は $C_1y-C_1{}^2\log(y+C_1)=\log x+C_2$と表される.

後者から，$\dfrac{dy}{dx}=0$で，$y=C$ （Cは任意定数）をうる，

（III） $\lambda=1,\mu=1$の場合

$$c^{-r}F(cx,cy,y',\cdots,c^{1-n}y^{(n)})=F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$

となる. x,yについて同次であるという. cは任意であるから$c=x^{-1}$とおくと，

$$c^{-r}F(cx,cy,y',\cdots,c^{1-n}y^{(n)})=F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$

の形に直すことができる．ここで，$y=xz$ とおくと，

$$y'=xz'+z,\ y''=xz''+2z',\ y'''=xz'''+3z'',\cdots$$

であるから，微分方程式は

$$F(1,z,xz'+z,x^2z''+2xz',x^3z'''+3x^2z'',\cdots)=0 \quad (\text{（II）のタイプの方程式）})$$

となる．

$G(z,xz',\cdots,x^nz^{(n)})=0$ の形（II）をしているから，$x=e^t$ と変換して解決できる．

例　$x^2(x+y)y''=(y-xy')^2$ を解け．

［解］ $F(x,y,y',y'')=x^2(x+y)y''-(y-xy')^2$ とすると，

$$F(cx,cy,y',c^{-1}y'')=c^2x^2\cdot c(x+y)c^{-1}y''-c^2(y-xy')^2=c^2F(x,y,y',y'')$$

であるから（III）タイプであることに注意.

さて，$x=e^t, y=e^tz$ と変換すると，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^tz\right)=\frac{d}{dt}\left(e^tz\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(e^tz+e^t\frac{dz}{dt}\right)e^{-t}=z+\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(z+\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(z+\frac{dz}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)e^{-t}=\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{1}{x}$$

である，与式に今の変換を代入すると，

$$x^3(1+z)\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{1}{x}=x^2\left\{z-\left(z+\frac{dz}{dt}\right)\right\}^2\Leftrightarrow(1+z)\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

これは独立変数 t を陽に含んでいまいタイプであるから，

$\dfrac{dz}{dt}=p$ とおいて，$\dfrac{d^2z}{dt^2}=\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{dp}{dz}\dfrac{dz}{dt}=p\dfrac{dp}{dz}$ を上の式に代入する．

$$(1+z)\left(p\frac{dp}{dz}+p\right)=p^2$$

をうる．$p\neq0$ のとき，

$$\frac{dp}{dz}-\frac{p}{1+z}=-1$$

となる．これを解いて，

$$p=e^{\int\frac{dz}{z+1}}\left(C_1+\int(-1)\cdot e^{-\int\frac{dz}{z+1}}dz\right)=(z+1)\left(C_1-\int\frac{dz}{z+1}\right)=(z+1)\left(C_1-\log(z+1)\right)$$

$$i.e.,\frac{dz}{dt}=(z+1)\left(C_1-\log(z+1)\right)\Leftrightarrow\int\frac{dz}{(z+1)\left(C_1-\log(z+1)\right)}=t+C_2$$

$$\therefore -\log\left(\log(z+1)-C_1\right)=\log C_2 x$$

ここで，　任意定数の解釈から，上の式を $\log(z+1)-C_1=\dfrac{C_2}{x}$ と解釈する．

$$z+1=e^{\left(C_1+\frac{C_2}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{y}{x}=e^{\left(C_1+\frac{C_2}{x}\right)}-1 \Leftrightarrow y=x\left(C_1 e^{\frac{C_2}{x}}-1\right) \quad \text{（一般解）}$$

をうる． $p=0$ のとき， $z=C, i.e., y=Cx$ でこれは一般解に含まれる．

§　2 階線形微分方程式

まず，微分方程式について考えよう．このタイプの方程式はニュートンの運動方程式から現れる．質量 m の質点の運動は

$$m\cdot\alpha=f(y) \qquad \left(\ \alpha=\frac{d^2y}{dt^2}:\text{加速度}\ \right)$$

なる微分方程式で記述される．これを質点の運動方程式とかニュートンの運動方程式と呼ばれている．ここでは

$$\text{微分方程式：}\ y''=f(y)$$

を考えよう． $\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ であるから， $y''=f(y)$ は

$$p\frac{dp}{dy}=f(y) \Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}p^2\right)=f(y)$$

とかける．したがって，

$$\frac{1}{2}p^2=\int f(y)dy \Leftrightarrow p=\pm\sqrt{\int 2f(y)dy}$$

特に，

$$y''=my$$

とすると， $y'=\pm\sqrt{my^2+C_1} \Leftrightarrow y'=\pm\sqrt{m}\sqrt{y^2+\dfrac{C_1}{m}}$ である．

(i)　$m>0$ のとき， $\dfrac{C_1}{m}=\alpha, \sqrt{m}=k$ よおくと，

(ii)　$m<0$ のとき，