

Torelli 群の降中心列と ホモロジーシリンダーのなすモノイドの Υ 降下列

佐藤 正寿（東京電機大学）

野崎雄太（横浜国立大学）, 鈴木正明（明治大学）,

Quentin Faes(University of Zurich), Gwénaél Massuyeau(Université de Bourgogne)
との共同研究に基づく

2024 年 12 月 20 日

- Y. Nozaki M. Sato, and M. Suzuki, “Abelian quotients of the Y-filtration on the homology cylinders via the LMO functor”, *Geometry & Topology* 26 (2022), No. 1, 221–282.
- Y. Nozaki M. Sato, and M. Suzuki, “On the kernel of the surgery map restricted to the 1-loop part”, *Journal of Topology* 15 (2022), No. 2, 587–619.
- Y. Nozaki M. Sato, and M. Suzuki, “A non-commutative Reidemeister-Turaev torsion of homology cylinders”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 376 (2023), No. 7, 5045-5088.
- Y. Nozaki M. Sato, and M. Suzuki, “Torsion elements in the associated graded modules of filtrations over the Torelli group and the homology cylinders”, *arXiv:2410.10061*.
- Q. Faes, G. Massuyeau, and M. Sato, “On the degree-two part of the associated graded of the lower central series of the Torelli group”, *arXiv:2407.07981*.

1. 研究内容

テーマ：曲面の写像類群 $\longleftrightarrow$ 3次元トポロジー



Σ_g の写像類群 $\mathcal{M}_g = \{\Sigma_g \text{の向きを保つ同相写像全体}\} / \text{isotopy}$.

- $\mathcal{M}_0 = \text{Homeo}_+(S^2) / \text{isotopy} = \{1\}$

- $\mathcal{M}_1 \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$

($\mathcal{M}_1 \rightarrow \text{Aut}(H_1(T^2; \mathbb{Z})) = \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ は単射)

群 $\mathcal{M}_g$ は,

- 有限表示可能,

- (種数について安定な) 有理コホモロジー環の構造,

などはわかっているが, $g \geq 2$ 以上において $\mathcal{M}_g$ は複雑な群である.

理由の1つは, $g \geq 2$ において,

$$\mathcal{I}_g = \text{Ker}(\mathcal{M}_g \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}))) : \text{Torelli 群}$$

が大きい群であるためである. 例えば,

- $\mathcal{I}_2$ は無限生成自由群 [McCullough-Miller 1986], [Mess 1992]
- $\mathcal{I}_g$ ($g \geq 3$) は有限生成. 生成系の位数は $O(2^{2g})$ [Johnson 1983].
生成系の位数は $O(g^3)$ [Putman 2012]
- $\mathcal{I}_g$ が有限表示可能かは未解決問題.
有理2次ホモロジーは有限生成 [Minahan 2023]

ところで, Torelli 群の情報は3次元トポロジーから得られることが多い.

Johnson 準同型 (Milnor 不変量), Heap の準同型 (同変3次コボルディズム群), Birman-Craggs 準同型 (Rochlin 不変量), Casson 不変量.

写像類群と3次元トポロジー

曲面に沿う3次元多様体の切り貼り (3次元コボルディズム) により, 次の対応をつくることができる.

写像類群 $\longleftrightarrow$ 閉有向3次元多様体

Torelli 群 $\longleftrightarrow$ 整ホモロジー3球面, ホモロジーシリンダー

Torelli 群の降中心列, 整ホモロジー3球面の降下列,
ホモロジーシリンダーの Y 降下列, の構造が知りたい!

2. 今回得られた結果

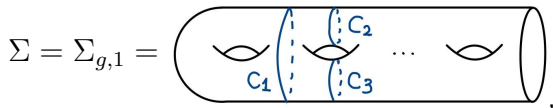
以降の話では, 曲面は (空でない) 連結な境界をもつものを考える.

$$\Sigma = \Sigma_{g,1} = \left(\text{Diagram of a cylinder with } g \text{ handles and one boundary component} \right),$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{g,1} = \text{Homeo}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1}) / (\text{境界を固定する isotopy}),$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{g,1} = \text{Ker}(\mathcal{M} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}))) : \text{Torelli 群}.$$

以降の話では、曲面は (空でない) 連結な境界をもつものを考える.



$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{g,1} = \text{Homeo}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1}) / (\text{境界を固定する isotopy}),$

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{g,1} = \text{Ker}(\mathcal{M} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})))$: Torelli 群.

Torelli 群の元の例: Dehn ツイスト $T_{c_1}, T_{c_2} T_{c_3}^{-1}$.

群 G の降中心列を以下のように表す.

$$G = G(1) \supset [G, G] = G(2) \supset [G, [G, G]] = G(3) \supset \cdots$$

今回の話の内容

3次元トポロジー (ホモロジーシリンダー) を使って, 次数商 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ を調べた.

- $\mathcal{I}/\mathcal{I}(2) \cong \text{Im } \tau_1 \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\binom{2g}{2} + \binom{2g}{1} + \binom{2g}{0}} \ (g \geq 3)$ [Johnson 1985],
- $\mathcal{I}(2)/\mathcal{I}(3) \otimes \mathbb{Q} \cong \text{Im } \tau_2 \oplus \mathbb{Q} \ (g \geq 3)$ [Hain 1997],
- $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1) \otimes \mathbb{Q}$ の $\text{Sp}(2g; \mathbb{Q})$ 加群構造
[Garoufalidis-Getzler 2017, Kupers-Randal-Williams 2023].

ここで, $H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$, $\pi = \pi_1 \Sigma_{g,1}$ として,

$$\tau_1: \mathcal{I} \rightarrow \text{Hom}(\pi, \pi(2)/\pi(3)),$$

$$\tau_1(\varphi): \pi \ni x \mapsto [\varphi(x)x^{-1}] \in \pi(2)/\pi(3),$$

は第1 Johnson 準同型.

定理 [Faes-Massuyeau-S. 2024]

$g \geq 3$ とする. このとき, $\mathcal{I}(2)/\mathcal{I}(3)$ は自由加群. 特に

$$\mathcal{I}(2)/\mathcal{I}(3) \cong \operatorname{Im} \tau_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Proof.

完全列

$$1 \rightarrow \mathcal{I}(2) \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow H_1(\mathcal{I}; \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

$\rightsquigarrow$ ホモロジー完全列

$H_2(\mathcal{I}; \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda^2(H_1(\mathcal{I}; \mathbb{Z})) \rightarrow \mathcal{I}(2)/\mathcal{I}(3) \rightarrow 0$ を得る. これを調べる. □

主定理 [野崎-鈴木-S. 2024]

n を奇数, $g \geq 3n$ とする.

このとき, 加群 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ にはトーション元がある.

Proof.

LMO 関手を用いて, ホモロジーシリンダーの Y 降下列の次数商 $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ 上に, ヤコビ図のなす $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 加群に値をもつ準同型を構成した. 自然な準同型

$$\iota: \mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1) \rightarrow Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$$

との合成がトーション元を detect する.



なぜ大事か

- 次数商 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ はホモロジー 3 球面の有限型不変量と関係がある. ($n = 1$ は Rochlin 不変量, $n = 2$ は Casson 不変量)
- 奇数次の次数商 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ にトーション元があることを初めて発見した.

3. ホモロジーシリンダーとは

定義 (ホモロジーシリンダー)

$$\Sigma = \Sigma_{g,1},$$

M : 連結な有向コンパクト 3次元多様体,

$m: \partial(\Sigma \times [-1, 1]) \xrightarrow{\cong} \partial M$: 向きを保つ同相写像,

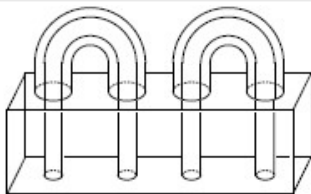
$m_+ : \Sigma \rightarrow \partial M$: 上面への制限, $m_- : \Sigma \rightarrow \partial M$: 底面への制限.

(M, m) が Σ のホモロジーシリンダーであるとは,

$$(m_+)_* = (m_-)_*: H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_1(M; \mathbb{Z})$$

を満たすことをいう. (つまり, $(m_-)_*^{-1} \circ (m_+)_* = \text{id}_{H_1(\Sigma; \mathbb{Z})}$.)

$$\Sigma \times [-1, 1] =$$



$\mathcal{IC} = \{\Sigma \text{のホモロジーシリンダー}\} / \text{同型}.$

- $\mathcal{IC}$ は上下に重ねることでモノイドをなす.

$$(M, m_+, m_-) \circ (N, n_+, n_-) = (M \cup_{m_+ = n_-} N, n_+, m_-) = \boxed{\begin{array}{c} N \\ M \end{array}}.$$

- 単射準同型

$$\iota: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{IC},$$

$$\varphi \mapsto (\Sigma \times [-1, 1], \text{id}_{\Sigma \times \{-1\}} \cup \varphi \times \{1\})$$

が存在する.

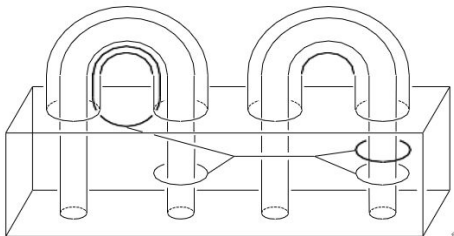
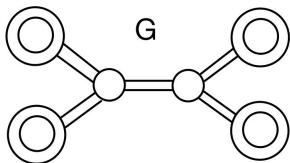
クラスパー手術 [Goussarov 1999,2001, 葉廣 2000]

モノイド IC に部分モノイド列をつくるための準備をする.

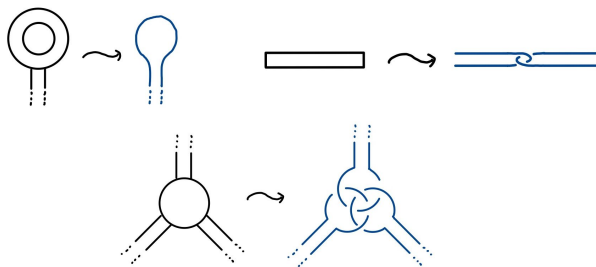
M : 連結なコンパクト有向3次元多様体.

次の連結なコンパクト曲面 $G \subset M$ をグラフクラスパーと呼ぶ.

- G は部品 (円板, 長方形 (バンド), アニュラス) からなる.
- バンドは円板同士, アニュラスと円板, のいずれかを結ぶ.
- 円板は3つのバンドに接する. アニュラスは1つのバンドに接する.



次のように M 内の曲面 G を枠付き絡み目 $L(G) \subset M$ に変える.



(黒字は曲面 (クラスパー), 青字は絡み目)

Dehn 手術により $M_{L(G)}$ を得る.

以上の操作を, グラフクラスパー G に沿うクラスパー手術と呼ぶ.

グラフクラスパー G の次数を, 円板の個数として定める.

Y 降下列

定義 (Y_n 同値)

$M, N \in \mathcal{IC}$.

同値関係 $M \sim_{Y_n} N$ を次で定める.

$\deg G_i = n$ である disjoint なグラフクラスパー $\{G_i\}_{i=1}^l$ が存在して,
 $M_{L\left(\coprod_{i=1}^l G_i\right)} \cong N$.

部分モノイド $Y_n \mathcal{IC}$

$Y_n \mathcal{IC} = \{M \in \mathcal{IC} \mid M \sim_{Y_n} \Sigma \times [-1, 1]\}$ とおくと,
 $\mathcal{IC}$ の部分モノイドをなす.

$$\mathcal{IC} = Y_1 \mathcal{IC} \supset Y_2 \mathcal{IC} \supset Y_3 \mathcal{IC} \supset \cdots$$

さらに $\iota: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{IC}$ について, $\iota(\mathcal{I}(n)) \subset Y_n \mathcal{IC}$.

定理 [Massuyeau-Meilhan 2003, 2013]

- ① $g \geq 3$ のとき, $\mathcal{IC}/Y_2 \cong \mathcal{I}/\mathcal{I}(2)$,
- ② $Y_2\mathcal{IC}/Y_3 \cong \mathcal{A}_2^c$ (torsion-free),
ただし, $\mathcal{A}_2^c$ は後述する次数 2 の連結なヤコビ図の加群.

定理 [野崎-鈴木-S. 2022, 2024]

$H = H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ について,
 H の生成する自由 Lie 代数を L ,
 $D_n = \text{Ker}([\cdot, \cdot]: H \otimes L_{n+1} \rightarrow L_{n+2})$ とおく.

- ① $Y_3\mathcal{IC}/Y_4 \cong (L_3 \oplus S^2H) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus (D_3 \oplus \Lambda^3H)$,
- ② $Y_4\mathcal{IC}/Y_5 \cong \mathcal{A}_4^c$ (torsion-free) ,
- ③ $\text{tor}(Y_5\mathcal{IC}/Y_6) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ for some $r > 0$.

4. LMO 関手とは

(Kontsevich 不変量 $\rightarrow$ LMO 不変量 $\rightarrow$
LMO 関手)

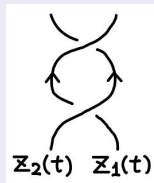
結び目の Kontsevich 不変量

定義：2-ブレイドの Kontsevich 不変量

$\mathbb{C} \times [0, 1]$ 内の 2-ブレイド $z_1(t)$, $z_2(t)$ に対して,

$$Z^K(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{z_1'(t) - z_2'(t)}{z_1(t) - z_2(t)} dt$$

と定める.



例： $b = (z_1(t), z_2(t))$, $z_1(t) = e^{2\pi i t}$, $z_2(t) = -e^{2\pi i t}$ について,

$$Z^K(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i(e^{2\pi i t} + e^{2\pi i t})}{e^{2\pi i t} + e^{2\pi i t}} dt = 1.$$

($z_1(t)$ と $z_2(t)$ の絡み目数)

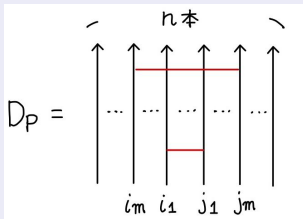
定義： n -ブレイドの Kontsevich 不変量

n -ブレイド $b = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ について,

$$\alpha_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{z'_i(t) - z'_j(t)}{z_i(t) - z_j(t)} dt,$$

$$Z^K(b) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{P=((i_1 j_1), \dots, (i_m j_m))} \right)$$

$$\int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1} \alpha_{i_1 j_1}(t_1) \wedge \dots \wedge \alpha_{i_m j_m}(t_m) D_P$$



と定める.

↪ 結び目, 絡み目の不変量 [Kontsevich 1993]

(Morse 結び目で考え, 臨界点の相殺で不変になるよう補正を行う)

LMO 不変量

M : 連結な有向閉 3 次元多様体,

L : S^3 内の枠付き絡み目であり, $S_L^3 \cong M$.

定理 [Le-村上-大槻 1999]

L の Kontsevich 不変量を用いて, M の位相不変量 (LMO 不変量) を構成できる.

定理 [Le 1997, 栗屋-Le-大槻 2012, 葉廣 2002, 葉廣-Le 2008]

整ホモロジー球面に LMO 不変量を制限すると, 有限型不変量 ([Le]), 摂動的な不変量 ([栗屋-Le-大槻]), 量子不変量 ([葉廣, 葉廣-Le]) に対して普遍性をもつ.

問: LMO 不変量の関手的拡張を与えよ. $\rightsquigarrow$ LMO 関手.

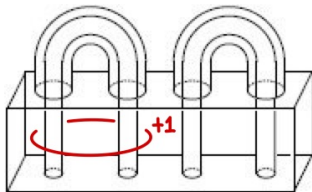
LMO 関手 [Cheptea-葉廣-Massuyeau 2008]

定義 (ラグランジアンコボルディズムの圏 $\mathcal{LCob}_q$)

対象: $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (+q-structure),

射: $\Sigma_{g,1}$ と $\Sigma_{h,1}$ の間の, “ホモロジー条件” を満たす 3次元コボルディズム (+q-structure),

射の合成: コボルディズムを上下に接着する. $M \circ N = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$.



$$2 \rightarrow 2$$

定義 (ヤコビ図)

$g, h \geq 0$.

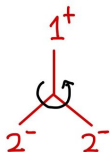
ヤコビ図とは次の 1,3 価頂点をもつグラフである.

- 1 価頂点は $\{1^+ \dots, g^+, 1^-, \dots, h^-\}$ でラベル付けされている.
- 3 価頂点には接する 3 つの辺の巡回順序が指定されている.

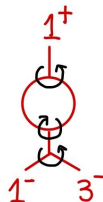
ヤコビ図の 3 価頂点の個数を次数と呼ぶ.



deg=0



deg=1



deg=3

あるヤコビ図の圏 ${}^{ts}\mathcal{A}$ を用いて, Cheptea-葉廣-Massuyeau により, LMO 関手

$$\tilde{Z}: \mathcal{LCob}_q \rightarrow {}^{ts}\mathcal{A}$$

が構成された. これは LMO 不変量の境界つき多様体への拡張である.

$\Sigma_{g,1}$ の間のコボルディズムの集合 $\mathcal{LCob}_q(g, g)$ の中で, ホモロジーシリンダーのなすモノイド $\mathcal{IC}$ に LMO 関手を制限すると, モノイド準同型

$$\tilde{Z}^Y: \mathcal{IC} \rightarrow \mathcal{A}^Y \otimes \mathbb{Q}$$

が得られる. 次ページで $\mathcal{A}^Y$ を説明する.

定義 ($\mathcal{A}^Y, \mathcal{A}^c$)

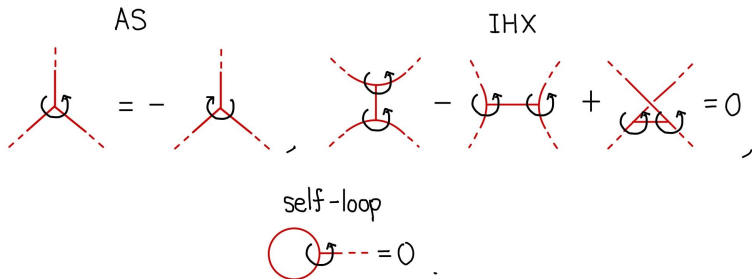
$g \geq 0$. $\{1^+, \dots, g^+, 1^-, \dots, g^-\}$ をラベルにもつヤコビ図を考える.

$\mathbb{Z}\{\text{strut comp. のないヤコビ図}\}/(\text{AS, IHX, self-loop relations}).$

を次数について完備化したもの (無限級数) を $\mathcal{A}^Y$ と表す.

$\mathcal{A}^Y$ は2つのヤコビ図の i^+ と i^- を接着することで積が定まる.

$\mathcal{A}^Y$ 中の連結なヤコビ図だけを考えたものを $\mathcal{A}^c$ と表す.



$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^c &= \left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \circ \text{---} \\ j \quad k \end{array} \mid i, j, k \in \{1^\pm, \dots, g^\pm\} \right\rangle \\
 &= \mathbb{Z}^{\binom{2g}{3}} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{2g(2g+1)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} 1^+ \\ \text{---} \circ \text{---} \\ 2^+ \quad 2^+ \end{array} \overset{\text{反転}}{=} \begin{array}{c} 1^+ \\ \text{---} \circ \text{---} \\ 2^+ \quad 2^+ \end{array} \overset{\text{AS}}{=} - \begin{array}{c} 1^+ \\ \text{---} \circ \text{---} \\ 2^+ \quad 2^+ \end{array}$$

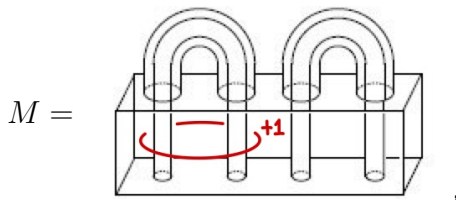
$$\mathcal{A}_2^c = \left\langle \begin{array}{cc} i & j \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ k & l \end{array} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ j \end{array} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \right\rangle$$

計算例

モノイド準同型

$$\tilde{Z}^Y: \mathcal{IC} \rightarrow \mathcal{A}^Y \otimes \mathbb{Q}$$

について,



$$\tilde{Z}^Y(M) = \emptyset - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1^+ \\ \uparrow \\ \text{loop} \\ \downarrow \\ 1^- \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{cc} 1^+ & 1^+ \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{loop} & \text{loop} \\ \downarrow & \downarrow \\ 1^- & 1^- \end{array} + (\deg \geq 4)$$

5. 主定理の詳細（証明）

補題 [Cheptea-葉廣-Massuyeau 2008]

$n \geq 1$.

$M \sim_{Y_{n+1}} N$ のとき, LMO 関手の次数 n 部分について,

$$\tilde{Z}_n^Y(M) = \tilde{Z}_n^Y(N) \in \mathcal{A}_n^Y \otimes \mathbb{Q}.$$

これより, $\tilde{Z}_n^Y: Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}$ が well-defined となる.

Cheptea-葉廣-Massuyeau はこれを記述した.

定理 [Cheptea-葉廣-Massuyeau 2008]

$n \geq 1$.

$$\tilde{Z}_n^Y \circ \mathfrak{s}_n = \pm \text{id} \otimes 1: \mathcal{A}_n^c \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \xrightarrow{\tilde{Z}_n^Y} \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}.$$

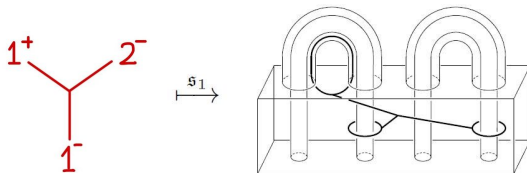
$\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ は次ページで紹介する全射準同型である.

手術写像 $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$

手術写像 [Goussarov 1999, 2001, 葉廣 2000]

次で定めるクラスパー G による $\Sigma \times [-1, 1]$ への手術として、
加群準同型 $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$ を定める。

- ヤコビ図の 3 価頂点の数だけ $\Sigma \times [-1, 1]$ 内に円板を配置する。
- ラベル i^+ (resp. i^-) をもつ 1 価頂点に対応して、
上面の i 番目の longitude (resp. 底面の i 番目の meridian) に
アニュラスを配置する。
- ヤコビ図の辺に対応して、円板やアニュラスをバンドで結ぶ。



$$\tilde{Z}_n^Y \circ \mathfrak{s}_n = \pm \text{id} \otimes 1: \mathcal{A}_n^c \rightarrow \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q} \text{ より,}$$

$$\tilde{Z}_n^Y \bmod \mathbb{Z}: Y_n \mathcal{IC} \rightarrow \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

は零写像. これより, LMO 関手の $(n+1)$ 次部分について,

$$\bar{z}_{n+1} = \tilde{Z}_{n+1}^Y \bmod \mathbb{Z}: Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が well-defined.

我々の主定理は $\bar{z}_{n+1}$ の明示的な記述である.

これは Cheptea-葉廣-Massuyeau の定理の $(n+1)$ 次版とみなすことができる.

定義

$\delta: \mathcal{A}_n^c \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を

$$\delta(J) = \sum_{v \in U(J)} \delta_v(J) + \sum_{\substack{v \neq w \in U(J), \\ l(v)=l(w)}} \delta_{vw}(J)$$

と定める. ただし $U(J)$ はヤコビ図 J の 1 価頂点全体の集合,
 $l(v) \in \{1^+, \dots, g^+, 1^-, \dots, g^-\}$ は 1 価頂点 v のラベル.

$$\delta_v \left(\begin{array}{c} l(v) \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} l(v) \quad l(v) \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} l(v) \quad l(v)^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \leftarrow \text{符号を変えたもの}$$

$$\delta_{vw} \left(\begin{array}{cc} l(v) & l(w) \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} l(v) \\ \frown \\ \text{---} \end{array}$$

定理 [野崎-鈴木-S. 2022]

$n \geq 1$ について, 次が可換.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_n^c & \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} & Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1} \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \bar{z}_{n+1} \\
 \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \frac{1}{2}} & \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
 \end{array}$$

$$\delta \left(\text{diagram} \right) = \underbrace{\text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3}_{=0} + \underbrace{\text{diagram}_4 + \text{diagram}_5 + \text{diagram}_6}_{=0} + \text{diagram}_7 \in \mathcal{A}_2^c \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

The diagrams are red tree-like structures with vertices labeled 1^+ and 2^+ (or 2^-). The first group of three diagrams sums to zero, and the second group of three diagrams also sums to zero. The final term is a single vertex labeled 1^+ connected to a vertex labeled 2^+ in a circle.

Remark

n が奇数のとき, $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ 上で $\bar{z}_{n+1}$ は非自明.

また既知の加群準同型とは異なるものであることがわかる.

$\rightsquigarrow \mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ にトーション元がある.

それ以外の結果

定理 [野崎-鈴木-S. 2022]

手術写像の精密化 $\tilde{s}: \mathbb{Z}\tilde{J}_n^c \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ を構成した.

定理 [野崎-鈴木-S. 2024]

準同型 $\bar{\tilde{z}}_{n+2}: Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+2}^c \otimes \mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ が存在する. また $n \geq 1$ について, 次を可換とする $\tilde{\delta}$ が存在し, 明示的に記述できる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n^c & \xrightarrow{s_n} & Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \\ \tilde{\delta} \downarrow & & \downarrow \bar{\tilde{z}}_{n+2} \\ \mathcal{A}_{n+2}^c \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \frac{1}{12}} & \mathcal{A}_{n+2}^c \otimes \mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}. \end{array}$$

定理 [野崎-鈴木-S. 2024]

$\text{tor}(Y_6\mathcal{IC}/Y_7) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^r$ for some $r > 0$.

最近行っている研究

定理 [Massuyeau 2012]

ホモロジーシリンダー上で, LMO 関手の 0-loop 部分は total Johnson 写像 (Johnson 準同型をまとめたもの) に一致する.

定理 [野崎-鈴木-S. 2023]

$\widehat{\mathbb{Q}\pi} = \varprojlim_n \frac{\mathbb{Q}\pi}{(I\pi)^n}$ とする. 写像

$$\tilde{\alpha}: IC \rightarrow K_1(\widehat{\mathbb{Q}\pi}), \quad \tilde{\alpha}(M) = \tau(C_*(M, m_-(\Sigma_{g,1}); \widehat{\mathbb{Q}\pi}))$$

は準同型である. また, 誘導準同型

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n: Y_n IC / Y_{n+1} &\rightarrow \text{Ker}(K_1(\widehat{\mathbb{Q}\pi} / (I\pi)^{n+1}) \rightarrow K_1(\widehat{\mathbb{Q}\pi} / (I\pi)^n)) \\ &\cong H_{\mathbb{Q}}^{\otimes n} / \text{cyclic} \end{aligned}$$

は LMO 関手の n 次部分の 1-loop 部分と榎本佐藤 trace の直和に等価である.