§　変数分離形

$$y' = f(x)g(y)$$

の形の方程式を変数分離形という。

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{g(y)}dy\right) = f(x)$$

であるから、

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C \quad (C \text{は任意定数})$$

注意 : 導関数が含まれない式になったとき方程式は解けたと見なす. すなわち, 必ずしも $y = f(x)$ の形に表さなくてもよい.

例　次の微分方程式を解け.

(i)　$y' = ky$（k は定数）

(ii)　$(1+x^2)yy' + (1+y^2)x = 0$

(iii)　$y' = (y^2-1)\tan x$

(iv)　$y'\tan x = \cot y$

(v)　$y' = x^2 e^{-3y}$

(vi)　$y' = -\dfrac{x-a}{y-b}$

[解] (i)　$\dfrac{y'}{y} = k \Leftrightarrow \log|y| = kx + c \Leftrightarrow y = Ce^{kx}$

(ii)　$\dfrac{2y}{2(1+y^2)}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{2(1+x^2)} \Leftrightarrow \log(1+y^2) = -\log(1+x^2) + c \Leftrightarrow (1+y^2)(1+x^2) = C$

(iii)

$$\frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{dx} = \tan x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = -\log|\cos x| + c \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{C\cos^2 x} \Leftrightarrow y = \frac{C\cos^2 x + 1}{C\cos^2 x - 1}$$

(iv)　$\tan y \dfrac{dy}{dx} = \cot x \Leftrightarrow -\displaystyle\int \frac{-\sin y}{\cos y}dy = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx + c \Leftrightarrow -\log|\cos y| + c = \log|\sin x|$

$\therefore \cos y \sin x = C$ をうる.

(v)　$e^{3y}\dfrac{dy}{dx} = x^2 \Leftrightarrow \displaystyle\int e^{3y}dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}e^{3y} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}C \Leftrightarrow e^{3y} = x^3 + C$

(vi)　$(y-b)\dfrac{dy}{dx} = -(x-a) \Leftrightarrow (y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$（$r$ は任意定数）

これは点(a,b)を中心とする同心円の族を表す.

例　次の微分方程式を解け.

(i)　$y'=\dfrac{x^2(y+1)}{y^2(x-1)}$　　(ii)　$y'=\dfrac{\tan x}{\tan y}$　　(iii)　$y'=\dfrac{x^2y}{1+x^3}$　$(\ y(1)=2\ )$

[解] (i)　$\displaystyle\int\frac{y^2}{y+1}dy=\int\frac{x^2}{x-1}dx+C$.∴ $\dfrac{1}{2}y^2-y+\log(y+1)=\dfrac{1}{2}x^2+x+\log(x-1)+C$

すなわち，$(y+x)(y-x-2)+\log\left(\dfrac{y+1}{x-1}\right)^2=C$をうる．特異解として$y=-1$.

(ii)　$\displaystyle\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+C$ ∴$-\log\cos y=-\log\cos x+C$. i.e,.　$\cos y=C^*\cos x$

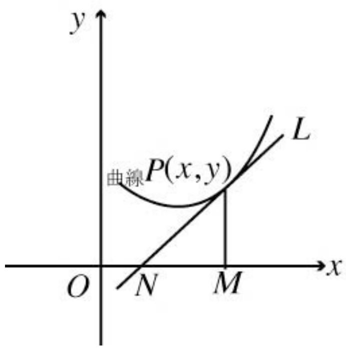
(iii)　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x^2}{1+x^3}dx+C$ ∴ $\log y^3=\log C(1+x^3)$．一般解は$y^3=c(1+x^3)$で,

$y(1)=2$より，　$c=4$

例　接線影の長さが一定の曲線を求めよ.

[[解] $P(x,y)$における接線の方程式は$Y=y'(X-x)+y$とかける．この直線とx軸との交点Nのx座標は$x-\dfrac{y}{y'}$である．題意より，接線影$=NM$ $=x-\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)=k$(一定)．すなわち，$\dfrac{y}{y'}=k$.

これを解くと，$y=C\exp\left(\dfrac{x}{k}\right)$.これが求める曲線である.



例　$y'=f(ax+by+c)$（$b\neq 0$）

$u=ax+by+c$とおくと,

$$\frac{du}{dx}=a+by'=a+bf(u)\Leftrightarrow\frac{1}{a+bf(u)}\frac{du}{dx}=1\Leftrightarrow\int\frac{du}{a+bf(u)}=x+C$$

たとえば，$y'=(x+y-1)^2$を解いてみよう.

$\displaystyle\int\frac{1}{1+u^2}du=x+C$を計算すればよい.

$\therefore\arctan u=x+c\Leftrightarrow u=\tan(x+c)\Leftrightarrow x+y-1=\tan(x+c)\Leftrightarrow y=\tan(x+c)-x+1$

例　$y'=\dfrac{x+y-1}{x+y-2}$

[解]　$u=x+y$ とおく．$\dfrac{du}{dx}=1+y'$ で，$\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{u-1}{u-2}=\dfrac{2u-3}{u-2}$ である．

$$\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\log|2u-3|=x+c \Leftrightarrow 2(x+y)-\log|2x+2y-3|=C$$

例　微分方程式 $xy'-y=x\sqrt{x^2+y^2}$ で，$y=xu$ と変換して，変数分離形に直し解を求めよ．

[解] $y=xu$ とおくと，$y'=u+xu'$ でこれを与式に代入する．

$$x(u+xu')-xu=x\sqrt{x^2+x^2u^2} \quad i.e., u'=\sqrt{1+u^2}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=x+C \quad \therefore \log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=x+C, \therefore y+\sqrt{x^2+y^2}=Cxe^x$$

例　次の微分方程式を解け

(i) $(x+y)^2y'=a^2$　　(ii) $(y-x)\sqrt{1+x^2}\,y'=(1+y^2)^{\frac{3}{2}}$

解] (i) $x+y=u$ とおく．$1+y'=u'$ である．$\therefore u^2(u'-1)=a^2$,

i.e., $\dfrac{u^2}{a^2+u^2}\dfrac{du}{dx}=1$ である．$\therefore u-a\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right)=x+C$

(ii) $x=\tan\theta, y=\tan\varphi$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dx}=(\sec^2\varphi)\dfrac{d\varphi}{d\theta}(\cos^2\theta)$

$$(\tan\varphi-\tan\theta)\sqrt{1+\tan^2\theta}\cdot(\sec^2\varphi)(\cos^2\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}=\left(1+\tan^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$(\tan\varphi-\tan\theta)\cdot(\sec^2\varphi)(\cos\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{1}{\cos^3\varphi}, \therefore (\tan\varphi-\tan\theta)\cos\varphi\cos\theta\frac{d\varphi}{d\theta}=1$$

$\therefore \sin(\varphi-\theta)\dfrac{d\varphi}{d\theta}=1$．　更に $\varphi-\theta=\xi$ と変換すると，で，$1-\dfrac{d\theta}{d\varphi}=\dfrac{d\xi}{d\varphi}$

であるから，$\dfrac{d\xi}{d\varphi}=1-\sin\xi$，$\therefore \displaystyle\int\frac{d\xi}{1-\sin\xi}=\varphi+C$ を計算すればよい．

$$\int\frac{d\xi}{1-\sin\xi}=\int\frac{1+\sin\xi}{1-\sin^2\xi}d\xi=\int\frac{1+\sin\xi}{\cos^2\xi}d\xi=\int\left(\frac{1}{\cos^2\xi}+\frac{\sin\xi}{\cos^2\xi}\right)d\xi=\tan\xi+\frac{1}{\cos\xi}$$

$$=\tan(\varphi-\theta)+\frac{1}{\cos(\varphi-\theta)}=\tan(\varphi-\theta)+\sqrt{1+\tan^2(\varphi-\theta)}$$

$$\tan(\varphi-\theta)=\frac{\tan\varphi-\tan\theta}{1+\tan\varphi\tan\theta}=\frac{x-y}{1+xy}$$

であるから，

$$\tan(\varphi-\theta)+\sqrt{1+\tan^2(\varphi-\theta)}=\frac{y-x}{1+xy}+\sqrt{1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2}=\frac{(y-x)+\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2}}{1+xy}$$

$$\therefore\text{一般解は}\frac{(y-x)+\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2}}{1+xy}=\arctan y+C$$

例　微分方程式：$yf(xy)+xg(xy)y'=0$ を適当な変数変換により，変数分離形にせよ．

[解] $xy=u$ と変換すると， $y+xy'=u'$ で，

$$\text{左辺}=yf(u)+xg(u)\left(\frac{u'-y}{x}\right)=yf(u)+g(u)u'-yg(u)=\frac{u}{x}\bigl(f(u)-g(u)\bigr)+g(u)\frac{du}{dx}$$

$$\therefore\frac{g(u)}{u\bigl(f(u)-g(u)\bigr)}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}$$

§　$y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形の方程式を同次形という．

$u=\dfrac{y}{x}$ とおく． $y=ux$ であるから， $y'=u'x+u$

$$y'=u'x+u\Leftrightarrow f(u)-u=\frac{du}{dx}x\Leftrightarrow\frac{1}{f(u)-u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\int\frac{1}{f(u)-u}du=\log|x|+C$$

であるから，解は

$$x=C\cdot\exp\left(\int\frac{1}{f(u)-u}du\right)$$

のように表される．

例　次の微分方程式を解け

(i)　$x^2y'=y^2+2xy$　　(ii)　$y^2+(x^2-xy)y'=0$　　(iii)　$y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0$

[解](i)　$y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\dfrac{y}{x}$ とかける． $\dfrac{y}{x}=u$ とおくと， $\displaystyle\int\frac{du}{\bigl(u^2+2u\bigr)-u}=\log|x|+C$

$$\therefore Cx=\exp\left(\int\frac{1}{u^2+u}du\right)=\exp\left(\log\left|\frac{u}{u+1}\right|\right)=\left|\frac{y}{y+x}\right|\quad\text{i.e.,}\ y=\frac{Cx^2}{Cx-1}\text{ をうる．}$$

(ii) $y' = -\dfrac{y^2}{x^2 - xy} = -\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 - \dfrac{y}{x}}$ で， $\dfrac{y}{x} = u$ とすると，

$$\int \frac{du}{\left(-\dfrac{u^2}{1-u} - u\right)} = \int \frac{u-1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \log u = \log x + C$$

$\therefore$ 一般解は $y = C\exp\left(\dfrac{y}{x}\right)$ である．

(iii) $y' = f(u) = u + \sqrt{1+u^2}$ とかけている．

$\therefore \displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \log x + C \quad i.e., y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$

例　$(x^2 + y^2 + a^2)y' + 2xy = 0$

[解] $x^2 + a^2 = \xi, y^2 = \eta$ と変換すると， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx} = \dfrac{1}{2y}\dfrac{d\eta}{d\xi}2x = \dfrac{x}{y}\dfrac{d\eta}{d\xi}$

与式は $(\xi + \eta)\dfrac{d\eta}{d\xi} + 2\eta = 0$， $\dfrac{d\eta}{d\xi} = -\dfrac{2\eta}{\xi + \eta} = -\dfrac{2(\eta/\xi)}{1 + (\eta/\xi)}$ とかける．

そこで， $\dfrac{\eta}{\xi} = u$ とおくと， $-\displaystyle\int \frac{u+1}{u(u+3)} du = \log|\xi| + C$

$\therefore -\left(\dfrac{1}{3}\log u + \dfrac{2}{3}\log(u+3)\right) = \log|\xi| + C \therefore \log u(u+3)^2|\xi|^3 = C$， $\therefore \xi^3(u+3)^2 u = C$

すなわち， $(\eta + 3\xi)^2\eta = C$ で， $y^2(y^2 + 3x^2 + 3a^2)^2 = C$ をうる．

例　$y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{px + qy + r}\right)$　($aq - bp \neq 0$)

連立１次方程式： $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$

の解を (x_0, y_0) とする．そこで， $x = u + x_0, y = v + y_0$ と変数変換する．

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du} = 1\cdot\frac{dy}{dx}\cdot 1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{pu + qv}\right)$$

を解けばよい. $\dfrac{dv}{du}=f\left(\dfrac{a+b(v/u)}{p+q(v/u)}\right)$ とかけるから, $w=\dfrac{v}{u}$ とおくと,

$$\int \frac{dw}{f\left(\dfrac{a+bw}{p+qw}\right)-w}=\log|u|+c$$

と解ける.

例　(i)　$y'=\dfrac{2x-3y+4}{3x+2y-7}$　　(ii)　$(2x-y+3)-(x-2y+3)y'=0$

[解] $2x-3y+4=0, 3x+2y-7=0$ を解くと, $x=1, y=2$ であるから, $u=x-1$, $v=y-2$ と変換.

$\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2u-3v}{3u+2v}$ を解く. $w=\dfrac{v}{u}$ とおく. $\displaystyle\int \frac{dw}{\frac{2-3w}{3+2w}-w}=\log|u|+c$ を計算すればよい.

$$\therefore -\frac{1}{2}\int \frac{2w+3}{w^2+3w-1}=\log|u|+c \Leftrightarrow \log\left|w^2+3w-1\right|+\log u^2=c$$

$$\therefore v^2+3uv-u^2=C \Leftrightarrow (y-2)^2+3(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C$$

$$\therefore -x^2-4x+9+3xy-7y+y^2=C$$

(ii)　$2x-y+3=0, x-2y+3=0$ の解は $(x,y)=(-1,1)$. $u=x+1, v=y-1$ と変換する. $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2u-v}{u-2v}$ を解く. $\dfrac{v}{u}=w$ と更に変換して,

$$\int \frac{1}{\frac{2-w}{1-2w}-w}dw=\log u+C \quad \text{ie.}, -\frac{1}{2}\int \frac{2w-1}{w^2-w+1}dw=\log u+C$$

$$\therefore \log\left|w^2-w+1\right|+\log u^2=C. \quad i.e., x^2+y^2-xy+3x-3y=C$$

例　$y'=\dfrac{3x-4y-2}{4x+3y-3}$

[解] $3x-4y-2=0, 4x+3y-3=0$ の解は $x=\dfrac{18}{25}, y=\dfrac{1}{25}$ である. $u=x-\dfrac{18}{25}$, $v=y-\dfrac{1}{25}$ と変換する.

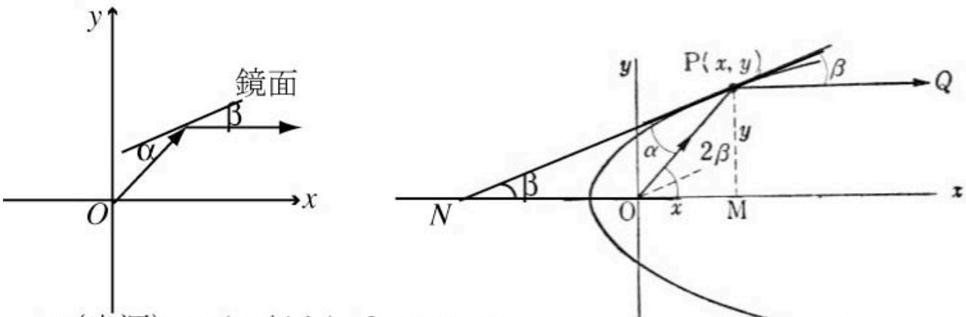
$$\frac{dv}{du}=\frac{3u-4v}{4v+3v}\Leftrightarrow\int\frac{1}{\dfrac{3-4w}{4+3w}-w}dw=\log|u|+c \quad \left(w=\frac{v}{u}\right)$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\int\frac{6w+8}{3w^2+8w-3}dw=\log|u|+c\Leftrightarrow\log\left|(3w^2+8w-3)u^2\right|=c$$

$$\therefore 3v^2+8uv-3u^2=C\Leftrightarrow -1875x^2-50x+144+5000xy-3750y+1875y^2=C$$

例　1 つの光源から発する光が, すべてある定まった直線に平行に反射するという．そのような反射鏡はどのようなものか.

[解]



O(光源), α(入射角), β(反射角)

上の図のように xy-平面で原点を光源とし，原点から発した光が反射鏡にあたって x 軸に平行に進むとして考える．反射鏡の断面曲線は xy-平面で曲線 $y=y(x)$ とするとき, この曲線を x 軸に関して回転させて得られた面が求める面と考える. すなわち，この曲線 $y=y(x)$ を微分方程式で記述すればよい．反射点 P の十分近くでは P における曲線の接線が反射面と考えられる.

入射角を α，反射角を β とすると，光の原理から $\alpha=\beta$ で，$\angle POM=\alpha+\beta=2\beta$ である.

$$\tan\beta=\frac{dy}{dx},\quad \tan2\beta=\frac{y}{x},\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

であるから,

$$\frac{y}{x}=\frac{2\dfrac{dy}{dx}}{1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\quad i.e., \frac{dy}{dx}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)}$$

とかける．$\dfrac{y}{x}=u$ とおくと，$f(u)=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$

$$\int \frac{1}{f(u)-u}\,du = \log|x| + C$$

を計算する．

$$\int \frac{1}{f(u)-u}\,du = \int \frac{u\,du}{-(1+u^2)\pm\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{u\,du}{\{-\sqrt{1+u^2}\pm 1\}\sqrt{1+u^2}}$$

そこで，$\sqrt{1+u^2}=t$，と置換すると，

$$\int \frac{1}{f(u)-u}\,du = \int \frac{dt}{-t\pm 1} = -\int \frac{dt}{t\mp 1} = -\log(t\mp 1) = -\log(\sqrt{1+u^2}\mp 1)$$

$$\therefore -\log(\sqrt{1+u^2}\pm 1) = \log|x| + C$$

$$\therefore |x| = \frac{C}{\sqrt{1+u^2}\pm 1} \quad \therefore \sqrt{x^2+y^2}\pm|x| = C \quad i.e., y^2 = C^2 \pm 2C|x|$$

§ 1階線形微分方程式

未知函数$y(x)$について，微分方程式

★　$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x)$$

をn**階線形微分方程式**という．特に$q(x)\equiv 0$のとき，すなわち，

★★　$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$$

を**斉次**とか**同次形**の線形微分方程式という．$q(x)\not\equiv 0$のとき**非斉次**形の線形微分方程式という．

VはC^∞級の函数の集合とする．$f,g\in V$，$\alpha\in \boldsymbol{R}$について$f+g\in V$，$\alpha f\in \boldsymbol{R}$であることは明らかである．すなわち，$V$は$\boldsymbol{R}$上ベクトル空間である．そして，

写像　$L: V \to V \left(y(x) \mapsto y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y \right)$

は線形写像である．なぜならば，$y_1,y_2\in V, \alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$について，

$$\begin{aligned} L(\alpha y_1+\beta y_2) &= \left(\alpha y_1+\beta y_2\right)^{(n)} + p_{n-1}\left(\alpha y_1+\beta y_2\right)^{(n-1)} + \cdots + p_0\left(\alpha y_1+\beta y_2\right) \\ &= \alpha\left(y_1^{(n)} + p_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + p_0 y_1\right) + \beta\left(y_2^{(n)} + p_{n-1}y_2^{(n-1)} + \cdots + p_0 y_2\right) \\ &= \alpha L(y_1) + \beta L(y_2) \end{aligned}$$

斉次線形微分方程式★★の解の集合V^*はVの部分空間であることは明らかである．何らかの方法で見つけた非斉次線形微分方程式★1の特殊解$f_0(x)$とし，斉次線形微分方程式★★の任意の解の$f(x)$とすると，$f(x)+f_0(x)$が★の任意の

解である．なぜならば

$$L(f(x)+f_0(x))=L(f(x))+L(f_0(x))=0+L(f_0(x))=q(x)$$

すなわち，

★の任意の解=（★★の任意に解）+（★の１つの特殊解）

の形に表されることがわかる．

注意：★が線形微分方程式と呼ばれる所以は線形代数からきている．

ここではまず$n=1$の場合，すなわち１階の線形微分方程式を扱う．

$$y'+p(x)y=q(x) \text{ --------------☆}$$

$$y'+p(x)y=0 \quad \text{---------------☆☆}$$

を考察する．まず$y'+p(x)y=0$の任意の解（一般解）を求めよう．

$$\frac{y'}{y}=-p(x)\Leftrightarrow \log|y|=-\int p(x)dx+c \Leftrightarrow y=C\exp\left(-\int p(x)dx\right) \quad (C\text{は任意定数})$$

をうる. 次に☆の特殊解を求める．ここで, 定数Cをxの函数とみて, すなわち,

$$y=C(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

が$y'+p(x)y=q(x)$の解になるように$C(x)$を決める．

$$y'+p(x)y=\left\{C'(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)-p(x)C(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)\right\}$$
$$+p(x)C(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)=q(x)$$

であるから,

$$C'(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)=q(x),\ \therefore C(x)=\int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx$$

で次の解の公式をうる．

$$y=\exp\left(-\int p(x)dx\right)\left(\int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx+C\ \right) \quad (C\text{は意定数})$$

このような解の求め方を**定数変化法**という．

例　次の微分方程式を解け．

(i) $y'+y=x$　　(ii) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$

(iii) $y'-y=\sin x$　　(iv) $y'-5y=4x^3-6x^2+11x-2$

(v) $xy'+2y=\sin x$　　(vi) $y'\sec^2 y+\dfrac{x\tan y}{1+x^2}=x$

(vii) $y'+y\cot x=\sec^2 x$　　(viii) $xy'+y=x\log x$

(ix) $y' = 4e^{-y}\sin x - 1$ (x) $(4r^2 s - 6)dr + r^3 ds = 0$

(xi) $xy' + y = x(1-x^2)$ (xii) $(\sin x\cos x)y' + y = 2\tan x$

[解] (i) $y = \exp\left(-\int 1dx\right)\left\{C + \int x\exp\left(\int 1dx\right)dx\right\} = e^{-x}\left(C + \int xe^x dx\right) = Ce^{-x} + x - 1$

(ii) $y = \exp\left(-\int \cos xdx\right)\left\{C + \int e^{-\sin x}\exp\left(\int \cos xdx\right)dx\right\} = e^{-\sin x}\left(C + \int e^{-\sin x}e^{\sin x}dx\right)$

$= e^{-\sin x}\left(x + C\right)$

(iii) $y = \exp\left(-\int -1dx\right)\left(C + \int \sin x\exp\left(\int -1dx\right)dx\right) = e^x\left(C + \int e^{-x}\sin xdx\right)$

$= Ce^x - \dfrac{1}{2}\left(\cos x + \sin x\right)$

(iv) $y = \exp\left(-\int -5dx\right)\left(C + \int (4x^3 - 6x^2 + 11x - 2)\exp\left(\int -5dx\right)dx\right)$

$= e^{5x}\left\{C + 4\int x^3e^{-5x}dx - 6\int x^2e^{-5x}dx + 11\int xe^{-5x}dx - 2\int e^{-5x}dx\right\}$

$= Ce^{5x} + 4\left\{-\dfrac{1}{625}(125x^3 + 75x^2 + 30x + 6)\right\} - 6\left\{-\dfrac{1}{125}\left(25x^2 + 10x + 2\right)\right\}$

$+11\left\{-\dfrac{1}{25}(5x+1)\right\} - 2\left(-\dfrac{1}{5}\right)$

$= -\dfrac{4}{5}x^3 + \dfrac{18}{25}x^2 - \dfrac{239}{125}x + \dfrac{11}{625} + Ce^{5x}$

注：特殊解を $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ として，方程式に代入すると，

$-(5a+4)x^3 + (3a - 5b + 6)x^2 + (2b - 5c - 11)x + (c - 5d + 2) \equiv 0$

であることから， $a = -\dfrac{4}{5}, b = \dfrac{18}{25}, c = \dfrac{-239}{125}, d = \dfrac{11}{625}$ をうる．

(v) $y = \exp\left(-\int \dfrac{2}{x}dx\right)\left(C + \int \dfrac{\sin x}{x}\exp\left(\int \dfrac{2}{x}dx\right)dx\right) = \dfrac{1}{x^2}\left(C + \int \dfrac{\sin x}{x}\cdot x^2dx\right)$

$= \dfrac{1}{x^2}\left(C + \int x\sin xdx\right) = \dfrac{1}{x^2}\left(C + \sin x - x\cos x\right)$

(vi) $z = \tan y$ と変換すると， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^{-1}\dfrac{dz}{dx} = \cos^2 y\dfrac{dz}{dx}$

$\therefore \cos^2 y\dfrac{dz}{dx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 y} + \dfrac{x}{1+x^2}z = x, \quad i.e., \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{x}{1+x^2}z = x$

を解けばよい．

$$\tan y=\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx\right)\left\{C+\int x\exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx\right)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C+\int x\sqrt{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3\right)=\frac{1+x^2}{3}+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

(vii) $$y=\exp\left(-\int\cot xdx\right)\left\{C+\int\sec^2 x\exp\left(\int\cot xdx\right)dx\right\}$$

$$\therefore y=\frac{1}{\sin x}\left(C+\int\sec^2 x\sin xdx\right)==\frac{1}{\sin x}\left(C+\frac{1}{\cos x}\right)$$

(viii) $$y=\exp\left(-\int\frac{1}{x}dx\right)\left\{C+\int(\log x)\exp\left(\int\frac{1}{x}dx\right)dx\right\}$$

$$\therefore y=\frac{1}{x}\left(C+\int x\log xdx\right)=\frac{1}{x}\left(C+\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right)$$

(ix) $$y'=4e^{-y}\sin x-1\Leftrightarrow e^y y'+e^y=4\sin x\Leftrightarrow (e^y)'+e^y=4\sin x$$

$$e^y=\exp\left(-\int dx\right)\left(C+\int 4\sin x\cdot\exp\left(\int dx\right)dx\right)=e^{-x}\left(C+4\int e^x\sin xdx\right)$$

$$\therefore e^y=e^{-x}\left(C+2(-\cos x+\sin x)e^x\right)=Ce^{-x}-2\cos x+2\sin x$$

(x) 与式$\Leftrightarrow \dfrac{ds}{dr}+\dfrac{4}{r}s=\dfrac{6}{r^3}\Leftrightarrow s=\exp\left(-\int\dfrac{4}{r}dr\right)\left(C+\int\dfrac{6}{r^3}\exp\left(\int\dfrac{4}{r}dr\right)dr\right)=\dfrac{C}{r^4}+\dfrac{3}{r^2}$

(xi) $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int(1-x^2)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)=\dfrac{1}{x}\left(C+\int(1-x^2)xdx\right)=\dfrac{1}{x}\left(C+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^4}{4}\right)$

(xii) $y=\exp\left(-\int\dfrac{dx}{\sin x\cos x}\right)\left\{C+\int\dfrac{2}{\cos^2 x}\exp\left(\int\dfrac{dx}{\sin x\cos x}\right)dx\right\}$

ところで，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\frac{(\tan x)'}{\tan x}dx=\log(\tan x)$ であるから，

$$\int\frac{2}{\cos^2 x}\exp\left(\int\frac{dx}{\sin x\cos x}\right)dx=\int 2\tan x\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int(\tan^2 x)'dx=\tan^2 x$$

$$\therefore y=\cot x\left(C+\tan^2 x\right)=C\cot x+\tan x$$

§ Bernoulli(ベルヌイ)の微分方程式

$y'+p(x)y=q(x)y^n$ （n は非負整数)

を Bernoulli(ベルヌイ)の微分方程式という． $n=0,1$ とときは解決済みである．これからは $n\neq 0,1$ とする．方程式の両辺に $(1-n)y^{-n}$ をかけると，

$$(1-n)y^{-n}y'+(1-n)p(x)y^{1-n}=(1-n)q(x)$$

である．そして，方程式は次のようにかける．

$$\left(y^{1-n}\right)'+\{(1-n)p(x)\}y^{1-n}=(1-n)q(x)$$

$$y^{1-n}=\exp\left(-(1-n)\int p(x)dx\right)\left\{C+\int(1-n)q(x)\exp\left(\int(1-n)p(x)dx\right)dx\right\}$$

と解ける．

例 次の微分方程式を解け．

(i) $xy'+y=y^2\log x$ (ii) $y'+y\sin x=y^2\sin x$

(iii) $y'+y=y^3x$ (iv) $y'-\dfrac{y}{3x}=y^4\log x$

(v) $y'-xy+y^3e^{-x^2}=0$

[解] (i) 両辺に $-x^{-1}y^{-2}$ をかけると，

$$-y^{-2}y'-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{\log x}{x}\Leftrightarrow(y^{-1})'-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{\log x}{x}$$

である． $\therefore\ \dfrac{1}{y}=\exp\left(-\int\left(-\dfrac{1}{x}\right)dx\right)\left\{C+\int\left(-\dfrac{\log x}{x}\right)\exp\left(\int\left(-\dfrac{1}{x}\right)dx\right)dx\right\}$

解： $\dfrac{1}{y}=x\left(C-\int\dfrac{\log x}{x^2}dx\right)=x\left(\dfrac{\log x}{x}+\dfrac{1}{x}+C\right)=\log x+1+Cx$

をうる．

(ii) $-y^{-2}$ を両辺にかけると， $-y^{-2}y'-y^{-1}\sin x=-\sin x$ である．

$$(y^{-1})'-y^{-1}\sin x=-\sin x\Leftrightarrow y^{-1}=\exp\left(-\int-\sin x dx\right)\left\{C+\int(-\sin x)\exp\left(\int-\sin x dx\right)dx\right\}$$

$$\therefore\ y^{-1}=e^{-\cos x}\left(C-\int(\sin x)\exp(\cos x)dx\right)=e^{-\cos x}\left(C+e^{\cos x}\right)=Ce^{-\cos x}+1$$

(iii) $-2y^{-3}$ を両辺にかける． $(y^{-2})'-2y^{-2}=-2x$ である．

$$\therefore\ y^{-2}=\exp\left(-\int-2dx\right)\left(C+\int(-2x)\exp\left(\int-2dx\right)dx\right)=e^{2x}\left(C-2\int xe^{-2x}dx\right)$$

$$y^{-2}=e^{2x}\left(C+\frac{1}{2}(1+2x)e^{-2x}\right)=Ce^{2x}+x+\frac{1}{2}$$

(iv) 与式$\Leftrightarrow (1-4)y^{-4}y'-(1-4)\dfrac{1}{3x}y^{-3}=-3\log x \Leftrightarrow \left(y^{-3}\right)'+\dfrac{1}{x}y^{-3}=-3\log x$

$$y^{-3}=\exp\left(-\int\frac{1}{x}dx\right)\left\{C+\int -3\log x\exp\left(\int\frac{1}{x}dx\right)dx\right\}=\frac{1}{x}\left(C-3\int x\log x dx\right)$$

$$\therefore \frac{1}{y^3}==\frac{1}{x}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x^2\log x+C\right)$$

(v)　与式$\Leftrightarrow -2y^{-3}y'+(-2)(-xy^{-2})=2e^{-x^2} \Leftrightarrow (y^{-2})'+2xy^{-2}=2e^{-x^2}$

$$\therefore y^{-2}=\exp\left(-\int 2xdx\right)\left(C+\int 2e^{-x^2}\exp\left(\int 2xdx\right)dx\right)=e^{-x^2}\left(C+\int 2dx\right)=e^{-x^2}\left(C+2x\right)$$

§　Riccati（リッカチ）の微分方程式

$$y'+p(x)y=q(x)y^2+r(x)y+s(x)$$

を Riccati（リッカチ）の微分方程式という．$q(x)\equiv 0$ のときには線形微分方程式に帰着する．この方程式は一般には求積法では解けないことが知られている．しかし何らかの方法で特殊解がわかっているときに求積法により一般解を求めることができる．今１つの特殊解$\varphi(x)$がわかっているとする．

$$y(x)=u(x)+\varphi(x)$$

とおく．これを方程式に代入すると，

$$u'+\varphi'+pu+p\varphi=q\left(u^2+2u\varphi+\varphi^2\right)+ru+r\varphi+s$$

$$u'+(p-2q\varphi-r)u=qu^2$$

となり，Bernoulli(ベルヌイ)の微分方程式に帰着する．

例　$y'-y=-\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}y^2+\dfrac{\sin x}{\cos x-\sin x}$　（$y=1$が特殊解)

[解]　$y=u+1$とおく．$p-2q\varphi-r=-1+2\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ より，

$$u'+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}u=-\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}u^2 \Leftrightarrow (u^{-1})'-\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}u^{-1}=\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}$$

$$u^{-1}=\exp\left(\int\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}dx\right)\left\{C+\int\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\exp\left(\int -\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}dx\right)dx\right\}$$

$$\therefore u^{-1}=\frac{1}{\cos x-\sin x}\left(C+\int\cos xdx\right)=\frac{C+\sin x}{\cos x-\sin x}$$

$\therefore$求める解は$y=u+1=\dfrac{\cos x-\sin x}{C+\sin x}+1=\dfrac{C+\cos x}{C+\sin x}$

例　$xy' - y + 2y^2 = 2x^2$ （ $\varphi(x) = x$ が一つの特殊解)

[解] 与式は $y' - \frac{1}{x}y = -2\frac{1}{x}y^2 + 2x$ 　とかける.

$$p - 2q\varphi - r = -\frac{1}{x} - 2\left(-2\frac{1}{x}\right)x = \frac{4x-1}{x}$$

であるから, $u' + \frac{4x-1}{x}u = -\frac{2}{x}u^2$ 　を解けばよい.

$\left(u^{-1}\right)' - \frac{4x-1}{x}u^{-1} = \frac{2}{x}$ で, $u^{-1} = \exp\left(\int \frac{4x-1}{x}dx\right)\left\{C + \int \frac{2}{x}\exp\left(\int -\frac{4x-1}{x}dx\right)dx\right\}$

$$u^{-1} = \exp(4x - \log x)\left(C + \int \frac{2}{x}(x \cdot e^{-4x})dx\right) = \frac{e^{4x}}{x}\left(C - \frac{1}{2}e^{-4x}\right) = \frac{Ce^{4x}}{x} - \frac{1}{2x}$$

求める解は $y = u + x = \dfrac{x(1+ce^{4x})}{-1+ce^{4x}}$ 　$(c = 2C)$ である.

例　$y' + (\sin x)y = y^2 + \cos x$ （$\varphi(x) = \sin x$ が特殊解)を解け

[解] $y = u + \sin x$ とする. $u' + (\sin x - 2\sin x)u = u^2$ $i.e., u' - (\sin x)u = u^2$

$$(u^{-1})' + (\sin x)u^{-1} = -1$$

$$u^{-1} = \exp\left(-\int \sin x dx\right)\left\{C + \int (-1)\exp\left(\int \sin x dx\right)dx\right\} = e^{\cos x}\left(C - \int e^{-\cos x}dx\right)$$

$\therefore$ 一般解は $\dfrac{1}{y - \sin x} = e^{\cos x}\left(C - \int e^{-\cos x}dx\right)$

例　$y' + \frac{4x}{2x^2 - x} - \frac{1+4x}{2x^2 - x}y + \frac{1}{2x^2 - x}y^2 = 0$ 　（$y = 1$ が特殊解)

[解] $y = u + 1$ と変換する. $p - 2q\varphi - r = -\frac{1+4x}{2x^2 - x} - 2 \cdot \frac{-1}{2x^2 - x} = \frac{1-4x}{2x^2 - x}$ であるから,

$$u' + \frac{1-4x}{2x^2 - x}u = -\frac{-1}{2x^2 - x}u^2 \Leftrightarrow \left(u^{-1}\right)' - \frac{1-4x}{2x^2 - x}u^{-1} = \frac{1}{2x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow \left(u^{-1}\right)'(2x^2 - x) + u^{-1}(4x-1) = 1 \Leftrightarrow \left(u^{-1}(2x^2 - x)\right)' = 1 \Leftrightarrow u^{-1}(2x^2 - x) = x + C$$

$\therefore (y-1)(x+C) = (2x^2 - x)$ をうる.

例　リッカチの微分方程式の一般解は次の形をもつことを示せ

$$y = \frac{c\, f_1(x) + f_2(x)}{c\, f_3(x) + f_4(x)}$$

またこの形の函数はリッカチの微分方程式の解であることを示せ
[解]　特殊解をφ，$y=u+\varphi$とすると，$(u^{-1})'-(p-2q\varphi-r)u^{-1}=-q$の形に変換されることは前に述べた.

$$u^{-1}=\exp\left(\int(p-2q\varphi-r)dx\right)\left\{C+\int(-q)\exp\left(-\int(p-2q\varphi-r)dx\right)dx\right\}=f_3(x)+cf_4(x)$$

のように解ける．この形から，

$$y=(u^{-1})^{-1}+\varphi=\frac{1}{f_3+c\,f_4}+\varphi=\frac{f_1+c\,f_2}{f_3+c\,f_4}$$

与式をcについて解くと，$c=\dfrac{-f_4y+f_2}{f_3y-f_1}$ をうる．そして両辺を微分すると，

$$\frac{(-f_4y+f_2)'(f_3y-f_1)-(f_3y-f_1)'(-f_4y+f_2)}{(f_3y-f_1)^2}=0$$

$$\therefore(-f_4y+f_2)'(f_3y-f_1)-(f_3y-f_1)'(-f_4y+f_2)=0$$

この式を整理すると，

$$y'+\phi(x)y=\psi(x)y^2+R(x)$$

となる．これはリッカチの微分方程式である.

§　完全微分方程式

$$\text{微分方程式：}\ p(x,y)+q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

を次のような形に表す

$$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$$

そのとき，$d\varphi(x,y)=p(x,y)dx+q(x,y)dy$であるような函数$\varphi(x,y)$がとれるときこの微分方程式を**完全微分方程式**という．そのとき，$\varphi(x,y)=C$が一般解である．なぜならば,

$$\frac{d}{dx}\varphi(x,y)=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=p(x,y)+q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

である．また$\varphi(x,y)$をこの微分方程式の**積分**とも呼ばれている.
完全微分方程式であるための条件を考察する.

定理　$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$が完全である$\Leftrightarrow\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}$

[証明]　$\Rightarrow$を示す．$d\varphi(x,y)=p(x,y)dx+q(x,y)dy$である函数$\varphi$が存在する.
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=p,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=q$で，$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$であることから，$\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}$をうる.

$\Leftarrow$を示そう．

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$$

とする．

$$F(x,y)=\int p(x,y)dx$$

とおく． $\dfrac{\partial F}{\partial x}=p(x,y),\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=p_y(x,y)=q_x(x,y)$ である．

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-q(x,y)\right)=0$ であるから，$\dfrac{\partial F}{\partial y}-q(x,y)$ は y のみの函数でり，これを $\psi(y)$ とする．

$$p(x,y)dx+q(x,y)dy=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\psi(y)\right)dy=d\left(F(x,y)-\int\psi(y)dy\right)$$

とかけている．これは $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ が完全であることを意味する．

[証明終]

完全微分方程式 $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ の一般解を求めよう．

$$F(x,y)-\int\psi(y)dy=C\text{（ }C\text{は任意定数）}$$

でなければならないから，一般解は

$$\int p(x,y)dx+\int\left(q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)dx\right)dy=C$$

と表されることがわかる．

例　$(x^3+2xy+y)dx+(y^3+x^2+x)dy=0$

[解] $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3+2xy+y)=2x+1,\dfrac{\partial}{\partial x}(y^3+x^2+x)=2x+1$ であるから，完全である．

$$\int(x^3+2xy+y)dx+\int\left\{(y^3+x^2+x)-\frac{\partial}{\partial y}\int(x^3+2xy+y)dx\right\}dy=C$$

$$\frac{x^4}{4}+x^2y+xy+\int\left\{(y^3+x^2+x)-(x^2+x)\right\}dy=C$$

一般解は $\dfrac{x^4}{4}+x^2y+xy+\dfrac{y^4}{4}=C$（$C$ は任意定数)である．

次のような解き方もある．

$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x} p(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} q(x_0,y)dy$$

とおく．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=p(x,y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial p}{\partial y}dx+q(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial q}{\partial x}dx+q(x_0,y)=\{q(x,y)-q(x_0,y)\}+q(x_0,y)=q(x,y)$$

すなわち，$d\Phi(x,y)=p(x,y)dx+q(x,y)dy$ がわかる．これは一般解は

$$\int_{x_0}^{x} p(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} q(x_0,y)dy=C$$

と表されることを意味する．上の例をこの公式を使って解いてみよう．

$$\int_0^x (x^3+2xy+y)dx+\int_0^y y^3dy=\frac{x^4}{4}+x^2y+xy+\frac{y^4}{4}=C$$

例　次の微分方程式が完全微分方程式であることを示し一般解を求めよ

(i) $(2x-y)dx+(2y-x)dy=0$

(ii) $(1-\cos y+y\cos x)dx+(2+\sin x+x\sin y)dy=0$ (ii)

(iii) $(y^2+e^x\sin y)dx+(2xy+e^x\cos y)dy=0$

(iv) $(x^2+\log y)dx+\dfrac{x}{y}dy=0$

(v) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$

[解] (i) $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x-y)=-1, \dfrac{\partial}{\partial x}(2y-x)=-1$ であるから完全である．

一般解は $\int_0^x (2x-y)dx+\int_0^y 2ydy=C$，すなわち，$x^2-xy+y^2=C$

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial y}(1-\cos y+y\cos x)=\sin y+\cos x, \dfrac{\partial}{\partial x}(2+\sin x+x\sin y)=\cos x+\sin y$

であるから完全である．一般解は

$\int_0^x (1-\cos y+y\cos x)dx+\int_0^y 2dy=C$ すなわち，$x-x\cos y+y\sin x+2y=C$

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^2+e^x\sin y)=2y+e^x\cos y, \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy+e^x\cos y)=2y+e^x\cos y$ であるから完

全である．一般解は

$$\int_0^x (y^2+e^x\sin y)dx+\int_0^y \cos y dy = C\ ,\ xy^2+e^x\sin y-\sin y+\sin y = xy^2+e^x\sin y = C$$

である．

(iv) $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+\log y)=\dfrac{1}{y},\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{y}$ であるから完全である．一般解は

$$\int_0^x (x^2+\log y)dx+\int_{y_0}^y 0dy = C \text{ すなわち } \frac{x^3}{3}+x\log y = C$$

(v)

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x^2}{y(x^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

であるから完全である．

不定積分の公式 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\log(x+\sqrt{x^2+a})\quad (a>0)$

を思い出しておこう．そこで一般解は

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\int_{y_0}^y \frac{1}{y}=C\ ,\log\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)=C\ ,\text{すなわち } x+\sqrt{x^2+y^2}=C \text{ である．}$$

例　次の微分方程式が完全微分方程式であることを示し一般解を求めよ

(i) $(7x-3y+2)dx+(-3x+4y-5)dy=0$

(ii) $(x^3+5xy^2)dx+(5x^2y+2y^3)dy=0$

(iii) $(y^2+e^x\sin y)dx+(2xy+e^x\cos y)dy=0$

(iv) $(ax^2+2hxy+by^2)dx+(hx^2+2bxy+cy^2)dy=0$

(v) $(x\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+(y\sqrt{x^2+y^2}-x)dy=0$

(vi) $(cosy+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$

[解] (i) $\dfrac{\partial}{\partial y}(7x-3y+2)=\dfrac{\partial}{\partial x}(-3x+4y-5)=-3$.

$$\int_0^x (7x-3y+2)dx+\int_0^y (4y-5)dy=C,\therefore \frac{7}{2}x^2-3xy+2x+2y^2-5y=C$$

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3+5xy^2)=\dfrac{\partial}{\partial x}(5x^2y+2y^3)=10xy$ であるから完全.

$$\therefore \int_0^x (x^3+5xy^2)dx+\int_0^y 2y^3dy=C\text{ ,すなわち}\frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{2}=C$$

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^2+e^x\sin y)=\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy+e^x\cos y)=2y+e^x\sin y$ であるから完全.

$$\int_0^x (y^2+e^x\sin y)dx+\int_0^y \cos y dy=xy^2+e^x\sin y\ \therefore\ xy^2+e^x\sin y=C$$

(iv) $\dfrac{\partial}{\partial y}(ax^2+2hxy+by^2)=\dfrac{\partial}{\partial x}(hx^2+2bxy+cy^2)=2hx+2by$ であるから完全.

$$\int_0^x (ax^2+2hxy+by^2)dx+\int_0^y cy^2dy=\frac{a}{3}x^3+hx^2y+bxy^2+\frac{cy^3}{3}$$

$\therefore$一般解は $ax^3+3hx^2y+3bxy^2+cy^3=C$

(v) $\dfrac{\partial}{\partial y}(x\sqrt{x^2+y^2}-y)=\dfrac{\partial}{\partial x}(y\sqrt{x^2+y^2}-x)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-1$ であるから完全.

$$\int_0^x (x\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+\int_0^y y^2dy=\left[\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2}-yx\right]_0^x+\frac{y^3}{3}.\ \therefore (x^2+y^2)^{3/2}-3xy=C$$

(vi) $\dfrac{\partial}{\partial y}(cosy+y\cos x)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\sin x-x\sin y)=-\sin y+\cos x$ であるから完全.

$$\int_0^x (cosy+y\cos x)dx+\int_0^y 0dy=x\cos y+y\sin x\ .\therefore\ x\cos y+y\sin x=C$$

§　積分因子

微分方程式：$(-y+x^2+y^2)dx+xdy=0$

は明らかに完全微分方程式でない．しかし，両辺に $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ をかけると，

$$\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}+dx=0\text{ で，}\quad d\left(\arctan\frac{y}{x}+x\right)=0$$

である．$\therefore$一般解は $\arctan\dfrac{y}{x}+x=-c$ すなわち，$y=-x\tan(x+c)$ をうる．

例　視察によって次の微分方程式を解け.

(i)　$x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$

(ii) $-ydx+xdy=0$

(iii)　$ydx-xdy=0$

(iv)　$ydx+xdy=0$

(v)　$xdx+ydy=0$

(vi)　$(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$

(vii)　$ydx-xdy+\log xdx=0$

(viii) $(1+xy)dx+x^2dy=0$

(ix)　$xdy+2ydx=xydy$

[解] (i)　$左辺=\frac{1}{3}(3x^2dx-3y^2dy)+(2xydx+x^2dy)=\frac{1}{3}d(x^3-y^3)+d(x^2y)$

$$=d\left(\frac{x^3-y^3+3x^2y}{3}\right)\quad \therefore x^3-y^3+3x^2y=C$$

(ii)　$-ydx+xdy=0 \Leftrightarrow \frac{-ydx+xdy}{x^2}=0 \Leftrightarrow d\left(\frac{y}{x}\right)=0$ ∴一般解は $\frac{y}{x}=C$.

(iii)　$ydx-xdy=0 \Leftrightarrow \frac{ydx-xdy}{y^2}=0 \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y}\right)=0$　∴一般解は $\frac{x}{y}=C$

(iv)　$ydx+xdy=0 \Leftrightarrow d(xy)=0 \therefore xy=C$

(v)　$xdx+ydy=0 \Leftrightarrow d(x^2+y^2)=0 \therefore x^2+y^2=C$

(vi)　与式 $\Leftrightarrow (2xdx+2ydy)+(ydx+xdy)=0 \Leftrightarrow d(x^2+y^2+xy)=0$,

$$\therefore x^2+y^2+xy=C$$

(vii) $-\frac{-ydx+xdy}{x^2}+\frac{\log x}{x^2}dx=0 \Leftrightarrow d\left(-\frac{y}{x}-\frac{\log x+1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow y-Cx+\log x+1=0$

(viii) 両辺に x^{-1} をかける.　$ydx+xdy+\frac{1}{x}dx=0 \Leftrightarrow d\left(xy+\log x\right)=0 \therefore xy+\log x=C$

(ix) 両辺に $(xy)^{-1}$ をかける.　$2\frac{1}{x}dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0 \Leftrightarrow d(2\log x+\log y-y)=0$

$$\therefore x^2y=Ce^y$$

例　視察によって次の微分方程式を解け.

(1)　$(y^2-xy)dx+x^2dy=0$ (両辺に $x^{-1}y^{-2}$ をかける)

(2)　$xdy-ydx-2(x^2+y^2)dx=0$ (両辺に $(x^2+y^2)^{-1}$ をかける)

(3)　$(x^2y-y^2)dx-x^3dy=0$　（両辺に $x^{-2}y^{-2}$ をかける）

(4)　$(x^2\cos x-y)dx+xdy=0$　（両辺に x^{-2} をかける）

(5)　$(3x^2+6xy+3y^2)dx+(2x^2+3xy)dy=0$　（両辺に $4x$ をかける）

[解] (1)　$\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)dx+\dfrac{x}{y^2}dy=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}dx-\dfrac{ydx-xdy}{y^2}=0 \Leftrightarrow d(\log x-\dfrac{x}{y})=0 \therefore x=Ce^{-\frac{x}{y}}$

(2)　$\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}-2dx=0 \Leftrightarrow d\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)-2x\right)=0 \therefore \dfrac{y}{x}=\tan(2x+C)$

(3)　$-\dfrac{1}{x^2}dx+\dfrac{ydx-xdy}{y^2}=0 \Leftrightarrow d\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=0 \therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y}=C$

(4)　$\cos xdx+\dfrac{-ydx+xdy}{x^2}=0 \Leftrightarrow d\left(\sin x+\dfrac{y}{x}\right)=0 \therefore \sin x+\dfrac{y}{x}=C$

(5)　$(12x^4+24x^2y+12xy^2)dx+(8x^3+12x^2y)dy=0$ で，これは完全である．

$$\int_0^x (12x^4+24x^2y+12xy^2)dx=C, \therefore 3x^4+8x^3y+6x^2y^2=C$$

上の幾つかのの例からも分かるが，次の事柄（全微分の公式）を念頭に置いておくと便利である．

公式

(i)　$d(xy)=ydx+xdy$　　(ii)　$d\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2}$

(iii)　$d\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{ydx-xdy}{y^2}$　　(iv)　$d\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)==\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

(v)　$d\log\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{-ydx+xdy}{xy}$　　(vi)　$\dfrac{1}{2}d\log\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2-y^2}$

(vii)　$d\log\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$　　(viii)　$d\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

例　上の公式を念頭において次の微分方程式を解け．

(i)　$x(x-y)y'+y^2=0$　　(ii)　$y-xy'=x^2y^2+y'$

(iii)　$(x^2+y^2)(y-xy')=2y^2(x+yy')$

[解](i)与式 $\Leftrightarrow x^2y'=xyy'-y^2 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y}=\dfrac{xy'-y}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}\log y=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right) \Leftrightarrow y=Ce^{y/x}$

(ii)与式 $\Leftrightarrow \dfrac{ydx-xdy}{y^2}=x^2dx+\dfrac{1}{y^2}dy \Leftrightarrow d\left(\dfrac{x}{y}\right)=d\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{y}\right) \therefore \dfrac{x}{y}=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{y}+C$

(iii) 与式$\Leftrightarrow \dfrac{ydx-xdy}{y^2}=2\dfrac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)} \Leftrightarrow d\left(\dfrac{x}{y}\right)=2d\log\sqrt{x^2+y^2}\ \therefore \dfrac{x}{y}=\log C(x^2+y^2)$

さて，微分方程式：$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$

が完全微分方程式ではないが，適当な函数$\lambda(x,y)$を選んで，

$$\lambda(x,y)p(x,y)dx+\lambda(x,y)q(x,y)dy=0 \text{-------------}☆$$

完全微分方程式になるとき，$\lambda(x,y)$を$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$の**積分因子**という．そこで，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(x,y)p(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,y)q(x,y)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$q(x,y)\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial x}-p(x,y)\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial y}=\lambda(x,y)\left(\frac{\partial p(x,y}{\partial y}-\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right)\text{--------}\bigstar$$

を満たしていなければならない．そして，

$$d\varphi(x,y)=\lambda(x,y)p(x,y)dx+\lambda(x,y)q(x,y)dy$$

であるような函数$\varphi(x,y)$とするとき，$\varphi(x,y)=C$が$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$の一般解である．積分因子を求めることと，もとの方程式を解くことは同じことである．一般に積分因子を見いだすことは困難なことで，ここでは典型的な場合について紹介する．

例　$y(2x+y)dx+x(2x+3y)dy=0$ で$\lambda=x^my^n$が積分因子であるようにm,nを決め方程式を解け．

[解]　与式の両辺にx^my^nをかける．

$$(2x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2})dx+(2x^{m+2}y^n+3x^{m+1}y^{n+1})dy=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2})=2(n+1)x^{m+1}y^n+(n+2)x^my^{n+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x^{m+2}y^n+3x^{m+1}y^{n+1})=2(m+2)x^{m+1}y^n+3(m+1)3x^my^{n+1}$$

この二つの式が恒等的に等しいから，$n+1=m+2, n+2=3(m+1)$でなければならない．$\therefore m=0, n=1$．

$$(2xy^2+y^3)dx+(2x^2y+3xy^2)dy=0$$

が完全で，$\displaystyle\int_0^x(2xy^2+y^3)dx+0=x^2y^2+xy^3, \therefore x^2y^2+xy^3=C$

微分方程式：$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$

において，次のような場合に積分因子が容易に求めることができる．

(I) $$\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}}{q}=\Phi(x)$$ （x のみの函数） のとき，

$$\lambda=\exp\left(-\int\Phi(x)dx\right)$$ が積分因子である．

(II) $$\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}}{p}=\Phi(y)$$ （y のみの函数） のとき，

$$\lambda=\exp\left(\int\Phi(y)dy\right)$$ が積分因子である．

(III) $$\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}}{xp-yq}=\Phi(xy)$$ （xy のみの函数） のとき，

$$\lambda=\exp\left(\int\Phi(xy)d(xy)\right)$$ が積分因子である．

(IV) $$x^2\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}}{xp+yQ}=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$ （ $\dfrac{y}{x}$ の函数 ）のとき，

$$\lambda=\exp\left(\int\Phi\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$ が積分因子である．

(V) $$\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}}{2(yp-xq)}=\Phi(x^2+y^2)$$ （x^2+y^2 の函数 ）のとき，

$$\lambda=\exp\left(\int\Phi(x^2+y^2)d(x^2+y^2)\right)$$ が積分因子である．

[証明]

(I) $$q(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial x}-p(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial y}=-q\Phi(x)\lambda=-\lambda\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$ で，★を満たす．

(II) $$q(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial x}-p(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial y}=-p\Phi(y)\lambda=-\lambda\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$ で，★を満たす．

(III) $u = xy$ とし，$\lambda = \exp\left(\int \Phi(u)du\right)$ とおくと，

$\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} = \dfrac{d\lambda}{du}\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\dfrac{d\lambda}{du} = x\lambda', \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} = \dfrac{d\lambda}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{d\lambda}{du} = y\lambda'$ で，さらに $\lambda' = \Phi(u)\lambda$ である．

$$\therefore \frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial y}p + \lambda\frac{\partial p}{\partial y} = x\lambda' p + \lambda\frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}q + \lambda\frac{\partial q}{\partial x} = y\lambda' q + \lambda\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda'(xp - yq) - \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = \Phi(xy)\lambda(xp - yq) - \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

$\therefore \dfrac{\partial(\lambda p)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\lambda q)}{\partial x}$.これは $\lambda = \exp\left(\int \Phi(xy)d(xy)\right)$ が積分因子であることを意味する．

注意：逆に，次のように考えることもできる．$\lambda = \lambda(u)$ ($u = xy$) が積分因子であるとする．

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda'(xp - yq) - \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

i.e., $\lambda'(xp - yq) = \lambda\left(\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}\right)$

$$,\ \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}}{xp - yq}, \therefore \lambda = \exp\left(\int \frac{\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}}{xp - yq}d(xy)\right)$$

(IV) $\lambda = \lambda\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\left(\dfrac{y}{x} = u\right)$ とおく．これが積分因子とする．

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda'\frac{1}{x}p + \lambda'\frac{y}{x^2}q + \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\lambda'}{x^2}(xp + yq) - \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

したがって，$\dfrac{\lambda'}{\lambda} = x^2\dfrac{\left(\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}\right)}{(xp + yq)}$，$\therefore \lambda = \exp\left(\int x^2\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)d\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$

(V) $\lambda = \lambda(u)$ $\left(x^2 + y^2 = u\right)$ が積分因子とする．

$$\frac{\partial(\lambda p)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda q)}{\partial x} = \lambda' 2yp - \lambda' 2xq + \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = 2\lambda'(yp - xq) - \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}}{2(yp-xq)},\ i.e.,\lambda=\exp\left(\int\Phi(u)du\right),\text{ここで，}\quad u=x^2+y^2.$$

例　次の非完全微分方程式を積因子を用いて解け．

(i)　$(3x+2y)dx+xdy=0$　　(ii)　$(x^2+y^2)dx+xydy=0$

(iii)　$3(x+y)^2dx+x(2x+3y)dy=0$　(iv)　$(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0$

(v)　$\left(a\sqrt{x^2+y^2}-cx\right)dx+\left(b\sqrt{x^2+y^2}-cy\right)dy=0$

[解] (i) 積分因子を $\lambda=\lambda(x,y)$ とする．★より $x\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}-(3x+2y)\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\lambda\cdot(2-1)$.

$\lambda=\lambda(x)$（x のみの函数）とすると，$x\dfrac{d\lambda}{dx}=\lambda$ で $\lambda=x$ が積分因子.

$(3x^2+2xy)dx+x^2dy=0$ は完全で，一般解は $\displaystyle\int_0^x(3x^2+2xy)dx+\int_0^y 0dy=C$

i.e., $x^3+x^2y=C$ が求めるかいである.

(ii) 積分因子を $\lambda=\lambda(x,y)$ とする．★より $xy\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}-(x^2+y^2)\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\lambda y$

与式を $y'=-\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ としておいていまの式に代入する．$\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}+y'\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\dfrac{\lambda}{x}$.

$\therefore \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}dy\right)=\dfrac{dx}{x}$，$i.e.,\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{dx}{x}$，ゆえに積分因子は $\lambda=x$

$\displaystyle\int_0^x(x^3+xy^2)dx+\int_0^y 0dy=C\quad\therefore\frac{x^3}{4}+\frac{x^2y}{2}=C,i.e.,x^3+2x^2y=C$ が一般解である.

(iii) 積分因子を $\lambda=\lambda(x,y)$ とする.

★ より $x(2x+3y)\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}-3(x+y)^2\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\lambda(2x+3y)$．与式を $y'=-\dfrac{3(x+y)^2}{x(2x+3y)}$ とかいて

この式に代入して，$\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}+y'\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\dfrac{\lambda}{x},i.e.,\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}dy\right)=\dfrac{dx}{x}\quad\therefore\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{dx}{x}$

ゆえに積分因子は $\lambda=x$ で，一般解は $\displaystyle\int_0^x 3x(x+y)^2dx+\int_0^y 0dy=C$

$\therefore$ 求める解は $3x^4+8x^3y+6x^2y^2=C$

(iv) $p=2x^3y^2-y,q=2x^2y^3-x$ とおくと，

$$\frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}}{xp-yq}=\frac{-4xy(x^2-y^2)}{2x^2y^2(x^2-y^2)}=-\frac{2}{xy}$$

である．(III)のパターンで，積分因子$\lambda=\exp\left(\int\left(-\dfrac{2}{xy}d(xy)\right)\right)=\dfrac{1}{x^2y^2}$をうる．

$$\frac{p}{x^2y^2}=2x-\frac{1}{x^2y},\frac{q}{x^2y^2}=2y-\frac{1}{xy^2}\text{ で，}$$

一般解は$\displaystyle\int_1^x\left(2x-\frac{1}{x^2y}\right)dx+\int_1^y\left(2y-\frac{1}{y^2}\right)dy=C$， $i.e.,x^2+y^2+\dfrac{1}{xy}=C$をうる．

(v)　$p=a\sqrt{x^2+y^2}-cx,q=b\sqrt{x^2+y^2}-cy$とする．

$$\frac{q_x-p_y}{2(yp-xq)}=-\frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

であるから，積分因子は$\lambda=\exp\left(\displaystyle\int-\frac{1}{2(x^2+y^2)}d(x^2+y^2)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$である．

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$を与式の両辺にかけて，$\left(a-\dfrac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\left(b-\dfrac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$

$$\therefore\int_0^x\left(a-\frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\int_0^y(b-c)dy=C$$

$$\therefore ax-c\sqrt{x^2+y^2}+by=C$$