

ベクトル 3 重積

$a, b, c \in \mathbb{R}^3$ に対して, $a \times (b \times c)$ はベクトル 3 重積とよばれる.

$a \cdot (b \times c)$ はスカラー 3 重積とよばれた.

公式 1 (ラグランジュの恒等式).

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

(証明の方針).

(Step 1) a が基本ベクトル e_1 の場合に限って証明する. (両辺を具体的に計算する.) 同じことを $a = e_2$ の場合, $a = e_3$ の場合についても実行する.

(Step 2) 次に $a \times (b \times c) = (\sum a_j e_j) \times (b \times c) = \dots$ を, 外積の代数的性質 (p.21, 命題 1.64) を用いて式変形してゆき, 最後に (Step 1) の結果を適用する. $\square$

ラグランジュの恒等式 (公式 1) から, いくつかの公式が導かれる.

公式 2.

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

(証明). 公式 1 より

$$(\text{左辺}) = \{(a \cdot c)b - (a \cdot b)c\} + \{(b \cdot a)c - (b \cdot c)a\} + \{(c \cdot b)a - (c \cdot a)b\} = 0$$

$\square$

公式 3.

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

(証明). スカラー 3 重積の公式 (傍注) と公式 1 により左辺を式変形する:

$$(\text{左辺}) = |a \ b \ c \times d| = a \cdot (b \times (c \times d)) = a \cdot \{(b \cdot d)c - (b \cdot c)d\} = (\text{右辺})$$

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= (a \times b) \cdot c \\ &= |a \ b \ c| \end{aligned}$$

$\square$

公式 4.

$$(a \times b) \times (c \times d) = |a \ b \ d|c - |a \ b \ c|d$$

(証明). 公式 1 より

$$(\text{左辺}) = ((a \times b) \cdot d)c - ((a \times b) \cdot c)d$$

であり, ここに登場したスカラー 3 重積を行列式で表しなおせば右辺となる. $\square$

公式 5.

$$|a \ b \ c|d - |b \ c \ d|a + |c \ d \ a|b - |d \ a \ b|c = 0$$

(証明の方針).

$(a \times b) \times (c \times d) = -(c \times d) \times (a \times b)$ の両辺に公式 4 を適用すればよい. $\square$