

一般の線形空間（増補版）

● 定義と例

数ベクトルのもつ基本的性質を抽出することにより，抽象的に「ベクトル」や「ベクトル空間」を定義することができる．

定義 1. V を空ではない集合とする．任意の $x, y \in V$ とスカラー k に対して，和とよばれる演算 $x + y$ とスカラー倍とよばれる演算 kx が定義されていて，かつ V は（零ベクトルとよばれる）特別な元 $0 \in V$ を含み，各 $x \in V$ に対して $-x \in V$ で表される元が存在するものとする．そして，任意の $x, y, z \in V$ とスカラー k, l に対して，

演算が定義されているとは， $x + y$ および kx が集合 V の元であることを意味する．

- (1) 和の結合法則: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (2) 和の交換法則: $x + y = y + x$
- (3) 零ベクトルとの和: $x + 0 = x$
- (4) 逆ベクトルとの和: $x + (-x) = 0$
- (5) スカラー倍の結合法則: $(kl)x = k(lx)$
- (6) スカラー 1 によるスカラー倍: $1x = x$
- (7) ベクトルの和に関する分配法則: $k(x + y) = kx + ky$
- (8) スカラー倍に関する分配法則: $(k + l)x = kx + lx$

が成り立つならば， V を線形空間もしくはベクトル空間とよぶ．線形空間 V の元をベクトルとよび， 0 を零ベクトル， $-x$ を x の逆ベクトルとよぶ．

命題 5.5, 問 5.4 (1)–(3) (p.125) にある計 8 つの計算法則

例 2. (1) （定義 1 は数ベクトルを手本としているのだから，言うまでもないが）数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は定義 1 の意味での線形空間である．

(2) $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間自体，ひとつの線形空間である．

(3) 幾何ベクトル全体は，定義 1.3, 定義 1.4 (p.2) で定めた和・スカラー倍で線形空間である．

(4) 数列に対して，和とスカラー倍を次のように定める：

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad k\{a_n\} = \{ka_n\}.$$

数列全体の集合は線形空間となる．とくに収束する数列のみを集めても線形空間である．

(5) 1 変数多項式全体の集合は，通常の演算（和・スカラー倍）に関して線形空間となる．とくに，自然数 n を固定して，次数が n 以下のものだけを集めても，ひとつの線形空間である．

(6) 区間 I で定義された連続関数全体の集合 $C(I)$ は，通常の演算（和・スカラー倍）に関して線形空間となる．とくに，実数 $L > 0$ を固定して，周期 L の連続関数のみを集めても，ひとつの線形空間である．

(7) 区間 I で定義された C^∞ 級微分可能関数全体の集合 $C^\infty(I)$ は、通常の演算（和・スカラー倍）に関して線形空間となる。

(8) 与えられた関数 $P(x), Q(x)$ に対し、微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ を考える。
この方程式の解全体のなす集合は線形空間である。

注意 3. 定義 1 においては、スカラーは実数であるという前提で線形空間の定義を述べた。しかし、スカラーは複素数であるとして、定義 1 を読めば、それは（複素）線形空間もしくは（複素）ベクトル空間とよばれるものの定義となる。

以下、（複素線形空間は扱わず）線形空間といったら実線形空間を意味する。

第 5 章では、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において、1 次結合、1 次独立、1 次従属、線形部分空間、生成について議論を行った。一般の線形空間 V においても、和とスカラー倍を V の演算に置き換えればこれらの概念を定義することができ、いくつかの定理や命題で述べた $\mathbb{R}^n$ についての諸性質もそのまま V に当てはまる。

定義 4 (定義 5.11, 定義 5.12 (p.128) 参照). ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in V$ に対し、

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \quad (c_1, c_2, \dots, c_m \text{ はスカラー})$$

の形のベクトルを、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ の 1 次結合（または線形結合）という。

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ に成立する 1 次関係が自明なものに限ること、すなわち、

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0} \text{ ならば } c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

が成り立つことを、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ は 1 次独立（または線形独立）であると言い表す。1 次独立ではないことを 1 次従属（または線形従属）という。

定義 5 (定義 5.35 (p.137) 参照). 線形空間 V の空集合ではない部分集合 W が次の 2 条件

(1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ に対して、 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$.

(2) 任意の $\mathbf{x} \in W$ とスカラー k に対して、 $k\mathbf{x} \in W$.

を満たすとき、 W を V の線形部分空間（もしくは部分ベクトル空間）、または単に部分空間という。

定義 6 (p.137 参照). 線形空間 V からいくつかのベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ を任意に選んでおき、それらの 1 次結合で書けるベクトル全体のなす集合

$$W = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \mid c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

を、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ が張る（または生成する）部分空間とよび、

$$W = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$$

と表す。

次元と基底については、 $\mathbb{R}^n$ と同様の場合とそうでない場合があり、注意が必要である。

定義 7 (定義 5.45 (p.141) 参照). (1) 線形空間 V に n 個の 1 次独立なベクトルは存在するが, $(n+1)$ 個の 1 次独立なベクトルは存在しないとき, V は n 次元であるといい, $\dim V = n$ と表す. そしてこのとき, n 個の 1 次独立なベクトルを V の基底とよぶ.

(2) 線形空間 V に任意個数の 1 次独立なベクトルが存在するならば, V は無限次元であるという.

例 2 の (4)–(7) は無限次元の線形空間である. (ただし, (5) の後半のものは $(n+1)$ 次元 (有限次元) である.) (8) は 2 次元である.

定理 8 (定理 5.47 (p.141) 参照). 線形空間 V とそれに属する n 個の 1 次独立なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対し, 次の 3 条件は同値である:

(i) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は V を張る. すなわち, $V = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$.

(ii) $\dim V = n$.

(iii) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は V の基底である.

n 次元線形空間 V に基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を選んであるとき, 任意の $\mathbf{x} \in V$ は $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$ と一意的に表されるわけだが, これを

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

のように書くと, 好都合な場合がある. ここで, $(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ は, 単に n 個のベクトルを横一列に並べたものである.

今,

$$V \ni \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

という対応をつくることができる. この対応 (1.1) は V から $\mathbb{R}^n$ への 1 対 1 上への写像である (確かめよ.) また,

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

のとき

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad c\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

という対応が生ずる. これは「(1.1) により, V における和・スカラー倍も数ベクトルの和・スカラー倍に対応している」ことを意味する. つまり, ひとたび V に基底を選んだならば n 次元ベクトル空間 V は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ として扱うことができることを意味する.

(1.1) により $\mathbf{x} \in V$ に対応する数ベクトル ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ を, $\mathbf{x} \in V$ の (基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に関する) 成分表示という.

どんな (大きな) 自然数 n に対しても, n 個の 1 次独立なベクトルが存在するという.

「 $1 \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の積と同じ計算則を右辺に適用すると左辺になる」と解釈すればよい.

● 直和

線形空間 V の 2 つの線形部分空間 W_1, W_2 に対し, 共通部分

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in W_1 \text{ かつ } x \in W_2\}$$

はまた, V の線形部分空間である. 一方, 集合としての和 $W_1 \cup W_2$ は, 必ずしも線形部分空間にならない. しかしながら,

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

は線形部分空間となる. (確かめよ. 演習問題 5-B [10] (p.148) も参照せよ.)

定理 9. W_1, W_2 が有限次元のとき

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

が成り立つ.

証明の前に次の補題を準備しておく.

補題 10. $a_1, \dots, a_l$ を n 次元線形空間 V の l 個 ($l < n$) の 1 次独立なベクトルとする. このとき, $(n-l)$ 個のベクトル $a_{l+1}, \dots, a_n$ を選び出し, $a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, \dots, a_n$ が V の基底となるようにできる.

(証明). 「すべての $b \in V$ で $a_1, \dots, a_l, b$ が 1 次従属となる」ことは起こり得ない. (仮にそうだとすると, $a_1, \dots, a_l$ が V の基底ということとなり, $l < n$ に矛盾.) したがって, ある $a_{l+1} \in V$ が選べて, $a_1, \dots, a_l, a_{l+1}$ が 1 次独立となるようにできる.

続けて, $a_1, \dots, a_l, a_{l+1}$ に対して上述の議論を適用することにより, $a_{l+2} \in V$ が選べて, $a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, a_{l+2}$ が 1 次独立となるようにできる.

以上を繰り返して, V の基底 $a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, \dots, a_n$ を得ることができる. $\square$

(定理 9 の証明). $\dim W_1 = l, \dim W_2 = m, \dim(W_1 \cap W_2) = r$ とする. $a_1, \dots, a_r$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とする.

$a_1, \dots, a_r$ は W_1 の中で 1 次独立であるから, 補題 10 より, $a'_{r+1}, \dots, a'_l \in W_1$ が選べて, $a_1, \dots, a_r, a'_{r+1}, \dots, a'_l$ は W_1 の基底であるようにできる.

$a_1, \dots, a_r$ は W_2 の中で 1 次独立であるから, 補題 10 より, $a''_{r+1}, \dots, a''_m \in W_2$ が選べて, $a_1, \dots, a_r, a''_{r+1}, \dots, a''_m$ は W_2 の基底であるようにできる.

このとき

$$W_1 + W_2 = \text{Span}\{a_1, \dots, a_r, a'_{r+1}, \dots, a'_l, a''_{r+1}, \dots, a''_m\}$$

である. そして, $a_1, \dots, a_r, a'_{r+1}, \dots, a'_l, a''_{r+1}, \dots, a''_m$ は 1 次独立である.

($\because$ 1 次関係 $\sum c_i a_i + \sum d_i a'_i + \sum k_i a''_i = 0$ を考えると,

$$W_1 \ni \sum c_i a_i + \sum d_i a'_i = - \sum k_i a''_i \in W_2 \quad (1.2)$$

であるから、これは $W_1 \cap W_2$ に属するベクトルである。ゆえに、右辺に登場した $-\sum k_i \mathbf{a}_i''$ は $W_1 \cap W_2$ の基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合で書けるはず、つまり

$$-\sum k_i \mathbf{a}_i'' = \sum \tilde{c}_i \mathbf{a}_i$$

のように書けるはずである。しかし、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}'', \dots, \mathbf{a}_m''$ は 1 次独立なのだから $\underline{k_{r+1} = \dots = k_m = 0}$, $\tilde{c}_1 = \dots = \tilde{c}_r = 0$ でなければならない。(1.2) に戻って

$$\sum c_i \mathbf{a}_i + \sum d_i \mathbf{a}_i' = \mathbf{0}$$

であるが、 $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i'$ の 1 次独立性より $\underline{c_1 = \dots = c_r = 0}$, $\underline{d_{r+1} = \dots = d_l = 0}$.)

ゆえに $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}', \dots, \mathbf{a}_l', \mathbf{a}_{r+1}'', \dots, \mathbf{a}_m''$ は $W_1 + W_2$ の基底である。したがって、

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= r + (l - r) + (m - r) = l + m - r \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

□

$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ のときは、(そのことを強調するために) $W_1 + W_2$ の代わりに

$$W_1 \oplus W_2$$

と書いて、 W_1 と W_2 の直和 (direct sum) とよぶ。

定理 9 より

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \quad (1.3)$$

が成り立つ。

● 線形写像

定義 11. 線形空間 V, X の間の写像 $f: V \rightarrow X$ が線形写像であるとは、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ とスカラー k に対して

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

一般の線形空間に関しても、線形性の成り立つ写像を線形写像とよぶのである。

が成り立つことをいう。また、1 対 1 かつ上への線形写像を (線形) 同型写像という。

例 12. (1) 微分可能な (変数 x の) 一変数関数全体のなす線形空間 $C^\infty(\mathbb{R})$ において、 d/dx を、関数に対してその導関数を対応させる写像と解釈しよう。すなわち、

$$\frac{d}{dx}: f(x) \mapsto \frac{df}{dx}(x).$$

この d/dx は $C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への線形写像である。

(2) 区間 $[0, 1]$ で連続な関数全体を $C([0, 1])$ で表す。写像 $\Phi: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

で定める。このとき、 Φ は線形写像である。

命題 13. 線形写像 $f: V \rightarrow X, g: X \rightarrow W$ の合成写像 $g \circ f: V \rightarrow W$ は線形写像である.

(証明). $g \circ f$ に対して, 線形性 (1.4) が成り立つことが簡単に確かめられる. (詳細は読者に任せる.) よって線形写像である. $\square$

命題 14. f, g を共に n 次元線形空間 V から X への線形写像とする. V のある基底 $v_1, \dots, v_n$ に対して,

$$f(v_1) = g(v_1), \dots, f(v_n) = g(v_n)$$

が成り立つならば, $f = g$ (すなわち, f と g は同じ写像) である.

「線形写像 $f: V \rightarrow$

X は, 基底の行き先で決まる」と言える.

(証明). $x \in V$ を任意のベクトルとし, x の基底 $v_1, \dots, v_n$ に関する表示を $x = \sum c_i v_i$ とする. このとき

$$f(x) = f\left(\sum c_i v_i\right) = \sum c_i f(v_i) = \sum c_i g(v_i) = g\left(\sum c_i v_i\right) = g(x)$$

が成り立つ. すなわち, $f = g$ である. $\square$

与えられた線形写像 $f: V \rightarrow X$ に対し,

$$f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

は X の線形部分空間である. また,

$$f^{-1}(0) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

は V の線形部分空間である.

命題 15. 線形写像 $f: V \rightarrow X$ について次の (1), (2) は同値である.

(1) 1 対 1 の写像であること

(2) $f^{-1}(0) = \{0\}$

(証明). (1) $\Rightarrow$ 「 $f(x) = 0$ ならば $f(x) = 0 = f(0)$ ゆえ $x = 0$.」 $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ 「 $f(x) = f(y)$ ならば $f(x - y) = 0$ ゆえ $x = y$.」 $\Rightarrow$ (1). $\square$

有限次元の場合, 次の重要な定理が成り立つ.

本質的には, 定理 5.56 (p.145) と同じ内容である.

定理 16.

$$\dim f(V) = \dim V - \dim f^{-1}(0)$$

(証明). $\dim V = n, \dim(f^{-1}(0)) = r$ とする. $f^{-1}(0)$ に基底 $a_1, \dots, a_r$ をとっておく. また, これらを含めて $a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n$ を V の基底となるように選んでおく. (補題 10 参照.) このとき

$$f(V) = \text{Span}\{f(a_1), \dots, f(a_r), f(a_{r+1}), \dots, f(a_n)\} = \text{Span}\{f(a_{r+1}), \dots, f(a_n)\}$$

である. ($f(a_i) = 0$ ($i = 1, \dots, r$) であるから.) 一方, $f(a_{r+1}), \dots, f(a_n)$ は 1 次独立である. (なぜなら, $c_{r+1}f(a_{r+1}) + \dots + c_n f(a_n) = 0$ とすると, $f(c_{r+1}a_{r+1} + \dots + c_n a_n) = 0$ ゆえ $c_{r+1}a_{r+1} + \dots + c_n a_n \in f^{-1}(0)$. したがって $c_{r+1}a_{r+1} + \dots + c_n a_n = c'_1 a_1 + \dots + c'_r a_r$ と表せることとなるが, 1 次独立性より すべて $c_i = 0, c'_j = 0$ である.)

ゆえに $f(a_{r+1}), \dots, f(a_n)$ は $f(V)$ の基底である. とくに $\dim f(V) = n - r$ を得る. $\square$

● 計量線形空間

一般の線形空間には、内積はあらかじめ備わっていないが、(線形空間によっては)適切な内積が定義されることがある。

有限次元線形空間には、必ず内積を定めることができる。

定義 17. V を実線形空間とする。任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して、実数 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を対応させる規則があつて、Web「正規直交基底」の命題 1 に述べた性質 (1)–(4) を満たすならば、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積とよばれる。

- $\mathbf{a} \in V$ に対し、 $\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ を $\mathbf{a}$ の長さまたはノルムとよび、 $|\mathbf{a}|$ で表す。
- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対し、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ であるとき、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は直交するといい、 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ と表す。
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ や $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ などで、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を表すこともある。

内積の備わった線形空間は計量線形空間とよばれる。

例 18. 区間 $[\alpha, \beta]$ における連続関数全体のなす線形空間 $C([\alpha, \beta])$ において、

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$$

と定めると、これは内積となる。

例えば、 $C([0, 2\pi])$ において、この内積を考えれば

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

の相異なる 2 つベクトル (この場合は関数) は直交することが確かめられる。

以下、有限次元 n の計量線形空間 V を考える。Web「正規直交基底」で $V = \mathbb{R}^n$ に限って述べたことのほとんどは、一般の V でもそのまま通用する：

- $\mathbf{0}$ を含まない $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in V$ が互いに直交するならば、それらは 1 次独立である。
- V のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ は、各々が長さ 1 で互いに直交するとき、正規直交系とよばれる。
- シュミットの直交化法
- 正規直交系である基底は正規直交基底とよばれる。
- 任意の V に対し、正規直交基底が存在する。(まず、(正規直交とは限らない) 基底を選んで、それにシュミットの直交化法を適用すればよい。)
- 内積を保つ線形変換 $f: V \rightarrow V$ を直交変換とよぶ。

更に、少し補足しておく：

命題 19. $e_1, \dots, e_n$ が V の正規直交基底であるとき、任意の $x \in V$ を $e_1, \dots, e_n$ の 1 次結合で表したものは

$$x = (x \cdot e_1)e_1 + (x \cdot e_2)e_2 + \dots + (x \cdot e_n)e_n$$

に等しい。

(証明). $x = \sum c_i x_i$ とおく. 両辺それぞれについて, e_j との内積をとって

$$x \cdot e_j = \left(\sum c_i e_i \right) \cdot e_j = \sum c_i (e_i \cdot e_j) = \sum c_i \delta_{ij} = c_j$$

を得る. □

W を V の線形部分空間とする. V の内積により W 自体も計量線形空間となる. また, W に属する任意のベクトルに直交するベクトルをすべて集めた集合

$$W^\perp = \{x \in V \mid \text{すべての } a \in W \text{ に対し } a \cdot x = 0\}$$

は V の線形部分空間であり, $W^\perp$ は W の直交補空間とよばれる.

定理 20. 有限次元の計量線形空間 V とその線形部分空間 W に対し, 次が成り立つ.

(1) $V = W \oplus W^\perp$

(2) $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$

(3) $(W^\perp)^\perp = W$

(証明). (1): $\dim W = r$ とし, W の正規直交基底 $e_1, \dots, e_r$ を選んでおく. 更に $a_{r+1}, \dots, a_n \in V$ を, $e_1, \dots, e_r, a_{r+1}, \dots, a_n$ が V の基底となるように選べる. (補題 10) その上で, シュミットの直交化法により, $e_1, \dots, e_r, a_{r+1}, \dots, a_n$ から正規直交基底 $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ を構成しておく. この基底を用いて, 任意の $x \in V$ を

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

と表したとき, その前半部分と後半部分を, それぞれ

$$x' = \sum_{i=1}^r x_i e_i, \quad x'' = \sum_{i=r+1}^n x_i e_i$$

とする. このとき

$$x = x' + x'' \quad (x' \in W, x'' \in W^\perp)$$

である. これは $W = W + W^\perp$ を意味する.

一方, $x \in W \cap W^\perp$ とすると, $x \in W$ かつ $x \in W^\perp$ であるから x は自分自身と直交することとなる. すなわち $x \cdot x = 0$. 内積の性質より $x = 0$ でなければならない. したがって, $W \cap W^\perp = \{0\}$ である.

以上より $V = W \oplus W^\perp$ であると結論される.

(2): これは (1) の系である. ((1.3) も見よ.)

(3): (1) の証明で用いた正規直交基底を再び用いると $W = \text{Span}\{e_1, \dots, e_r\}$ および $W^\perp = \text{Span}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ である. これより従う. □