

双 1 次形式

• 数ベクトル空間上の双 1 次形式

A を $n \times m$ 行列とする. A を用いて,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{y} \quad (1.1)$$

と定められた写像 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を双 1 次形式もしくは双線形形式とよぶ. 双 1 次形式 (1.1) は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), & f(k\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= kf(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), & f(\mathbf{x}, k\mathbf{y}) &= kf(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

を満たす. これは $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ を任意に固定したとき, 対応 $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ が $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}$ への線形写像であることを意味する. 同じく $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ を任意に固定したとき, 対応 $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$ が $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像であることを意味する.

逆に (1.2) を満たす写像 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ があったならば, ある $n \times m$ 行列 A が一意に決まって, f は (1.1) の形に書くことができる. 実際, 基本ベクトルに対する f の値 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ を a_{ij} と置いて, $A = (a_{ij})$ と決めればよい. したがって, 性質 (1.2) をもって, 双 1 次形式の定義としてもよい.

$n = m$ の場合を考えよう. 双 1 次形式 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は,

- (i) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすとき, 対称双 1 次形式とよばれる.
- (ii) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすとき, 交代双 1 次形式とよばれる.

もちろん, 対称でも交代でもない双一次形式もある.

命題 1. A を $n \times n$ 行列とし, それから決まる双 1 次形式を $f_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

- (i) f_A が対称 $\iff A$ が対称行列, すなわち ${}^t A = A$.
- (ii) f_A が交代 $\iff A$ が交代行列, すなわち ${}^t A = -A$.

(証明). スカラーを 1×1 行列と見なすと, それは対称であることに注意して

$$f_A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = {}^t \mathbf{y} A \mathbf{x} = {}^t ({}^t \mathbf{y} A \mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} {}^t A {}^t (\mathbf{y}) = {}^t \mathbf{x} {}^t A \mathbf{y}$$

を得るから,

A が対称行列ならば $f_A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{y} = f_A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

A が交代行列ならば $f_A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} (-A) \mathbf{y} = -{}^t \mathbf{x} A \mathbf{y} = -f_A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

が成り立つ.

逆に, f_A を対称双 1 次形式とし, $A = (a_{ij})$ とする. このとき, 基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ に対して成り立つ等式 $f_A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f_A(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ は

$${}^t \mathbf{e}_i A \mathbf{e}_j = {}^t \mathbf{e}_j A \mathbf{e}_i \quad \therefore a_{ij} = a_{ji}$$

となって A が対称行列であることを示す.

f_A が交代双 1 次形式ならば A が交代行列であることも全く同様の理由からわかる. $\square$

例 2. (1) $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ($= \mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積) と定める. f は対称双 1 次形式である. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = {}^t \mathbf{x} \mathbf{y} = {}^t \mathbf{x} I_n \mathbf{y}$ なのだから, f は単位行列 I_n で決まる対称双 1 次形式ということもできる.

(2) $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x} \ \mathbf{y})$ と定める. 行列式の性質より, 性質 (1.2) および $g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つ. つまり, g は交代双 1 次形式である.

(1.1) 型による表示は

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t \mathbf{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

である.

●数ベクトル空間上の対称双 1 次形式と 2 次形式

双 1 次形式 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき, $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ と定めれば, q は 2 次形式となる. 逆に, 2 次形式 q が与えられたとき,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \{q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\}$$

と定めることにより, 対称双 1 次形式 f が得られる. 以上により, 対称双 1 次形式と 2 次形式は 1 対 1 に対応する. この対応だが, 対称行列を用いた表示で考えれば, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{y}$ と $q(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x}$ (A は同じ対称行列) を対応させているに過ぎない.

●一般のベクトル空間上の双 1 次形式

定義 3. V, W を実ベクトル空間とする¹. 写像 $f: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ について,

1. 任意の $v_0 \in V$ を固定したとき, 対応 $w \mapsto f(v_0, w)$ が W から $\mathbb{R}$ への線形写像であり,
2. 任意の $w_0 \in W$ を固定したとき, 対応 $v \mapsto f(v, w_0)$ が V から $\mathbb{R}$ への線形写像である

とき, f は双 1 次形式 (bilinear form) とよばれる.

定義 4. $V = W$ の場合の双 1 次形式 $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

- $f(v, v') = f(v', v)$ ならば, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ は対称双 1 次形式であるという.
- $f(v, v') = -f(v', v)$ ならば, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ は交代双 1 次形式であるという.

定義 5. V をベクトル空間とする. 写像 $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ が

1. $Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$ を満たし,
2. $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})$ が双 1 次形式となる

ならば, Q を (V 上の) 2 次形式とよぶ. このとき, Φ は対称となる. Φ を Q に同伴した双 1 次形式とよぶ.

¹もちろん複素ベクトル空間 V, W と $\mathbb{C}$ で, 全く同じ定義が可能である.

数ベクトル空間で考えた概念について, それらの特徴づける性質を抽出することで, 一般のベクトル空間上の概念とすることができる.

対称双 1 次形式 $\tilde{\Phi}$ がまず与えられたときに, $Q(\mathbf{x}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ と定めれば, これは明らかに 2 次形式となり, その同伴双 1 次形式は元の $\tilde{\Phi}$ に (2 倍の差があるが) 一致する. つまり, 2 次形式と対称双 1 次形式は同等の概念と言ってよい.

定理 6. 対称双 1 次形式 $(,)$ を持つ実ベクトル空間 V^n には次の条件 (1)–(4) を満たす基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ が存在する.

- (1) $(e_i, e_j) = 0$ for $i \neq j$
- (2) $(e_i, e_i) = 1$ for $1 \leq i \leq p$
- (3) $(e_i, e_i) = -1$ for $p+1 \leq i \leq r$
- (4) $(e_i, e_i) = 0$ for $r+1 \leq i \leq n$

このときの p や r は $(,)$ そのもので決まる. (e_i のとり方によらない.)

定理 6 における定数 p, r を用いて次の用語が定義される.

定数の組 $(p, r-p)$ を $(,)$ の符号数 (signature) と呼ぶ. r が n に等しい場合, 対称双一次形式 $(,)$ は非退化であるという. 非退化対称双一次形式 $(,)$ をスカラー積と呼ぶ. スカラー積でも, 部分空間に制限したときは, 必ずしも非退化とはならないことに注意せよ.

スカラー積は,

- 符号数が $(n, 0)$ であるとき正定値 (positive definite),
- 符号数が $(0, n)$ であるとき負定値 (negative definite)
- それ以外のとき不定値 (indefinite)

であるという.

スカラー積をもつベクトル空間で典型的なものは, 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n \\ &= {}^t \mathbf{x} \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & -I_q \end{pmatrix} \mathbf{y} \text{ where } 0 \leq p \leq n, q = n - p \end{aligned}$$

というようにスカラー積 $(,)$ を定めたものである. このスカラー積を備えた $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^{p,q}$ とか $\mathbb{R}_q^n$ などと書く.

なお, 定理 6 の意味するところとして「スカラー積をもつベクトル空間は, すべてどれかの $\mathbb{R}^{p,q}$ に同型である」と言える. したがって, 「典型的な」と言うよりはむしろ「本質的な」なのである.