1 次形式と双対空間

• 数ベクトル空間上の 1 次形式

$\mathbb{R}^n$ から $\underline{\mathbb{R}\text{ へ}}$ の線形写像（線形関数）$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は，$\mathbb{R}^n$ 上の **1 次形式**（もしくは**線形形式**）ともよばれる．つまり，1 次形式は $1 \times n$ 行列 A を用いて，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \tag{1.1}$$

と表されるものである．より具体的に $A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ とすると，1 次形式 f は

$$f\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A\boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

という式で与えられる．

$\mathbb{R}^n$ 上の 1 次形式全体のなす集合を $(\mathbb{R}^n)^*$ で表す．任意の $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して，和 $f+g$ およびスカラー倍 kf を

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$$
$$(kf)(\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$$

で定義する．このとき，$f+g, kf \in (\mathbb{R}^n)^*$ であり，この和，スカラー倍は線形空間の公理を満たすことが確かめられる．（Web「一般の線形空間」の定義 1 を参照せよ．）つまり，$(\mathbb{R}^n)^*$ は線形空間である．$(\mathbb{R}^n)^*$ を $\mathbb{R}^n$ の**双対空間**とよぶ．

注意 1. $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ を表す行列を A とし，$g \in (\mathbb{R}^n)^*$ を表す行列を B とする．すなわち，$f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$ が $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ で与えられているとする．このとき，$f+g$ を表す行列は $A+B$ であり，kf を表す行列は kA である．

一方，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるとき，f と A を同一視してしまえば，

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{A \mid A \text{ は } 1 \times n \text{ 行列 }\}$$

と解釈される．ここで，$1 \times n$ 行列は n 項横ベクトルでもあるのだから

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{A \mid A \text{ は } n \text{ 項横ベクトル }\}$$

補足：$\mathbb{R}^n$ の元は縦ベクトルであると約束してあるので，$(\mathbb{R}^n)^*$ の元は横ベクトルなのである．

といってもよい．この解釈の下で，$(\mathbb{R}^n)^*$ における演算（和・スカラー倍）は，横ベクトルに関する演算（和・スカラー倍）に一致する．このことからも，$(\mathbb{R}^n)^*$ がベクトル空間となるのは当然のことといえる．また，

$$\dim(\mathbb{R}^n)^* = n$$

もわかる．

● 一般のベクトル空間上の 1 次形式

V を（一般の）実ベクトル空間とする．線形写像（線形関数）$f\colon V \to \mathbb{R}$ は，V 上の **1 次形式**（もしくは**線形形式**）ともよばれる．V 上の 1 次形式全体のなす集合を V^* で表す．任意の $f, g \in V^*$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して，和 $f+g$ およびスカラー倍 kf を

$$\begin{gathered}(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \\ (kf)(\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})\end{gathered}$$

で定義する．このとき，$f+g, kf \in V^*$ であり，この和とスカラー倍は線形空間の公理（Web「一般の線形空間」の定義 1）を満たすことが確かめられる．つまり，V^* は線形空間である．V^* を V の**双対空間**とよぶ．

これ以降，断らない限り，V は $\dim V = n\,(\neq 0, \infty)$ の実ベクトル空間 を表すものとする．まず，次の補題を用意しておく．

補題 2. $f, g \in V^*$ が $f = g$ であるためには，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関して $f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ であることが必要十分である．

（補題 2 は，Web「一般の線形空間（増補版）」の命題 14 の特別な場合に過ぎない．証明は（自らつけるか）そちらを参照せよ.）

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする．$\boldsymbol{\alpha}^i \in V^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ を

$$\boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 \ (j = i \text{ のとき}) \\ 0 \ (j \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する．補題 2 より，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，$\boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v})$ を定めたといえる．念のため詳述すると，任意の元 $\boldsymbol{v} = \sum c^j \boldsymbol{v}_j \in V$ に対しては

$$\boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\alpha}^i(\textstyle\sum c^j \boldsymbol{v}_j) = \sum c^j \boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}_j) = \sum c^j \delta^i_j = c^i \tag{1.2}$$

というように値が決まるのである．

ここで $\boldsymbol{\alpha}^1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^n$ の右上にあるのは添え字（番号づけ）であって，累乗を表しているのではないことに注意せよ．以下に説明する Einstein の規約の観点から，番号付を右上に記すと便利な場合がある．

注意 3. 和を表す記号 $\sum$ を省略することがしばしばある．例えば (1.2) は

$$\boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\alpha}^i(c^j \boldsymbol{v}_j) = c^j \boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}_j) = c^j \delta^i_j = c^i$$

というように書く．記号 $\sum$ を省略してしまったら，混乱や誤解を招くのではないかと思われるかもしれないが「上下に同じ添え字があるときは，その添え字に関して和をとる」と心にとどめておけばよい．このような記法を **Einstein の規約**とよぶ．本ノートでもこの Einstein の規約に従うこととする．

命題 4. V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対し，$\boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}_j) = \delta^i_j$ で定めた $\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^n$ は V^* の基底をなす．したがってとくに $\dim V^* = \dim V$.

(証明). 1 次関係 $c_1\boldsymbol{\alpha}^1+c_2\boldsymbol{\alpha}^2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}^n=\mathbf{0}$, すなわち，$c_i\boldsymbol{\alpha}^i=\mathbf{0}$ が成り立つとする．このとき，任意の j に対し

$$c_i\boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}_j)=0, \quad \therefore c_i\delta^i_j=0, \quad \therefore c_j=0$$

でなければならない．これは $\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\dots,\boldsymbol{\alpha}^n$ が 1 次独立であることを意味する．

次に，$\boldsymbol{f}\in V^*$ を任意の 1 次形式とする．$\boldsymbol{v}_i$ の $\boldsymbol{f}$ による像 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}_i)$ が $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}_i)=f_i\in\mathbb{R}$ であるとする．このとき 1 次結合 $f_j\boldsymbol{\alpha}^j$ を作れば，$(f_j\boldsymbol{\alpha}^j)(\boldsymbol{v}_i)=f_i$ となるから，$\boldsymbol{f}=f_j\boldsymbol{\alpha}^j$ と結論される．（補題 2.）したがって，任意の $\boldsymbol{f}\in V^*$ は $\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\dots,\boldsymbol{\alpha}^n$ の 1 次結合で書けること，すなわち，$V^*=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\dots,\boldsymbol{\alpha}^n\}$ がわかった．

ゆえに $\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\dots,\boldsymbol{\alpha}^n$ は V^* の基底である． □

定義 5. V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ に対し，条件 $\boldsymbol{\alpha}^i(\boldsymbol{v}_j)=\delta^i_j$ で定まる $\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\dots,\boldsymbol{\alpha}^n\in V^*$ を $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ の**双対基底**とよぶ．

V の基底を取り替えたとき，双対基底にはどのような変化が起こるかを調べておこう．

$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を V の基底とし，$\tilde{\boldsymbol{v}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{v}}_n$ もまた V の基底であるとする．これらについては，ある $n\times n$ 正則行列 P が存在して

$$(\tilde{\boldsymbol{v}}_1\ \cdots\ \tilde{\boldsymbol{v}}_n)=(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)P \tag{1.3}$$

が成り立つ．

必ずしも数ベクトルではないベクトルを横に並べるような記法については，Web「基底の変換」を参照せよ．

一方，$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ の双対基底を $\boldsymbol{\alpha}^1,\dots,\boldsymbol{\alpha}^n$ で，$\tilde{\boldsymbol{v}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{v}}_n$ の双対基底を $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^1,\dots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^n$ で表すこととしよう．式 (1.3) の両辺に左から ${}^t(\boldsymbol{\alpha}^1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}^n)$ を作用させると

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}^n\end{pmatrix}(\tilde{\boldsymbol{v}}_1\ \cdots\ \tilde{\boldsymbol{v}}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}^n\end{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)P=I_nP=P$$

を得る．更に，上の式の両辺に左から P^{-1} を掛けて

$$P^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}^n\end{pmatrix}(\tilde{\boldsymbol{v}}_1\ \cdots\ \tilde{\boldsymbol{v}}_n)=I_n$$

を得る．これは

$$\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^1\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}^n\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

すなわち

$$(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^1\ \cdots\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^n)=(\boldsymbol{\alpha}^1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}^n)\,{}^tP^{-1} \tag{1.4$'$}$$

を示す．

以上でわかったことを補題としてまとめておく．

補題 6. V の二組の基底に (1.3) の関係式があるとき，対応する双対基底には (1.4) の関係式が生ずる．

ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ をひとつ固定したとき，$\Phi_{\boldsymbol{v}} \colon V^* \to \mathbb{R}$ を

$$\Phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \tag{1.5}$$

というように定義してみる．このとき，$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ は線形空間 V^* から $\mathbb{R}$ への線形写像である．なぜなら

$$\begin{aligned} \Phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}) &= (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) = \Phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}) + \Phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{g}), \\ \Phi_{\boldsymbol{v}}(k\boldsymbol{f}) &= k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = k\Phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}) \end{aligned}$$

であるから．つまり，

$$\Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$$

である．命題 4 より $\dim (V^*)^* = \dim V^*$ であるから，$\dim (V^*)^* = n$ である．

線形空間 V^* に対して命題 4 を適用するということ．

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とし，$\boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^n$ をその双対基底としたとき，

$$\Phi_{\boldsymbol{v}_i}(\boldsymbol{\alpha}^j) = \boldsymbol{\alpha}^j(\boldsymbol{v}_i) = \delta_i^j$$

が成り立つから，$\Phi_{\boldsymbol{v}_1}, \dots, \Phi_{\boldsymbol{v}_n} \in (V^*)^*$ は，$\boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^n \in V^*$ の双対基底である．更に，各 $\boldsymbol{v} \in V$ に $\Phi_{\boldsymbol{v}}$ を対応させること

$$L \colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$$

を考えてみると，L は線形写像であり（問:確かめよ.），L は基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を基底 $\Phi_{\boldsymbol{v}_1}, \dots, \Phi_{\boldsymbol{v}_n}$ へ写している．これは L が線形同型写像であることを意味する．

得られたことを定理としてまとめておく．

定理 7. $(V^*)^*$ は V に線形同型である．

$\dim V = \infty$ のときは，この定理は必ずしも成り立たない．

定理 7（およびそれを導いた過程）より，$\boldsymbol{v} \in V$ と $\Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$ を同一視することで，

$$V = (V^*)^*$$

として扱ってもよいことがわかる．とくに $\Phi_{\boldsymbol{v}}$ を単に $\boldsymbol{v}$ と書いてしまうことも許されよう．その場合，(1.5) は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$$

と表されることになる．これは，$\boldsymbol{v} \in V$ と $\boldsymbol{f} \in V^*$ に対し，値 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ をとることは，$\boldsymbol{v}$ から見ても $\boldsymbol{f}$ から見ても ‘対等’ であることを表している．このことから，

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f} \rangle \, (= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))$$

のような記法を使うこともよくある．$\langle \ , \ \rangle$ は $V^* \times V$ 上の（もしくは $V \times V^*$ 上の）双 1 次形式であると言うこともできる．