2 次形式

変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の斉次 2 次多項式

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum c_{ij} x_i x_j \tag{1.1}$$

は **2 次形式**とよばれる．このノートでは，変数 x_j は実数を動くものとし，係数 c_{ij} もすべて実数の定数であるものとする．2 次形式 (1.1) は

$$q : \boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

というように，ベクトルにスカラーを対応させる写像とも解釈される．

• 2 変数の 2 次形式

(1.1) で述べたことを $n = 2$ の場合に適用すれば，2 変数 x, y の 2 次形式 $q = q(x, y)$ とは，定数 a, b, c により

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1.2}$$

b に 2 倍を付けてあるのは，(1.3) 型に書き換えたときに都合がよいからである．

と表されるものといえる.（ただし $a = b = c = 0$ という場合は除く.）2 次形式 (1.2) は

$$q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

というように対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ を用いて表すことができる．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ と置いてしまえば，簡潔に

$$q = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} \tag{1.4}$$

と書ける．逆に，任意の対称行列 A が与えられたとき，(1.4) で 2 次形式を定めることができる．こうして，(2 変数の) 2 次形式と (2 次) 対称行列は 1 対 1 に対応する．

(2 変数の) 2 次形式を扱うことは，(2 次) 対称行列を扱うことと言ってよい．

問 1. 次の 2 次形式を対称行列を用いて表せ．

$$(1)\ 3x^2 + 8xy + y^2 \quad (2)\ x^2 - y^2 \quad (3)\ -x^2 + xy + 2y^2 \quad (4)\ x^2 - 4xy$$

任意の対称行列 A はある直交行列 P により対角化されるという事実を思い出そう：

直交行列 P に対しては，$P^{-1} = {}^tP$ であることも思い出そう．

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

ここで λ_1, λ_2 は A の固有値であり，それらは実数である.（Web「対称行列の直交行列による対角化」の定理 3 を参照せよ.）${}^tP$ を T と書きあらためれば，T もまた直交行列であり

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} {}^tP = {}^tT \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T$$

であるから，2 次形式 $q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は

$$q = {}^t\boldsymbol{x}{}^tT \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T\boldsymbol{x} = {}^t(T\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T\boldsymbol{x}$$

と表せる．この内容を定理としてまとめておこう．

定理 2. 2 次形式 $q = q(x, y)$ は，適当な変数の直交変換 $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ により

$$q = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 \tag{1.5}$$

と表せる．($\boldsymbol{x}' = {}^t(x' \ y')$.)

(1.5) の形で表された 2 次形式 q を，**標準形**で表された 2 次形式とよぶ．

問 3. 適当な変数の直交変換を施すことにより，次の 2 次形式を標準形で表せ．

(1) $5x^2 + 4xy + 2y^2$ (2) $x^2 - 6xy + y^2$ (3) $x^2 + 6xy + 9y^2$ (4) $3x^2 + 4xy$

• 2 次曲線

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ を実定数とする．($a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ という場合は除く．) 方程式

$$\mathit{\Gamma} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0 \tag{1.6}$$

で表される xy 平面上の図形 $\mathit{\Gamma}$ を，**2 次曲線** (quadric curve) とよぶ．

注意 4. 定数 a_{ij}, b_i, c の値によっては，(1.6) の定める集合が空集合，1 点，1 本ないし 2 本の直線となってしまうこともあるが，このノートではそれらを 2 次曲線とはよばないこととする．

つまり，本ノートの意味する2次曲線は，いくつかの書物でよばれるところの「真の2次曲線」(proper quadric curve) である．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

と置けば，(1.6) は

$$\mathit{\Gamma} : {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} + c = 0 \tag{1.6$'$}$$

と表せる．

(1.6) の 2 次の項の部分を標準形にするための直交変換 $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ を考えれば，$\mathit{\Gamma}$ は

$$\mathit{\Gamma} : \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + b_1' x' + b_2' y' + c = 0 \tag{1.7}$$

と表すことができる．高校数学で習うように (1.7) は一般に楕円などの方程式である．

実際，<u>λ_1, λ_2 がともに 0 でないならば</u>，更に適当な平行移動による座標変換 $\begin{cases} X = x' + \xi \\ Y = y' + \eta \end{cases}$ を考えれば

変数 x', y' のそれぞれの部分を平方完成するように ξ, η を選ぶ．

$$\mathit{\Gamma} : \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = k \tag{1.8}$$

となるから，(いくつかの例外的な場合を除けば) λ_1, λ_2 が同符号ならば楕円，異符号ならば双曲線である．もう少し精密に述べよう：

- λ_1, λ_2 が同符号のとき：

  必要ならば (1.8) の辺々を (-1) 倍すればよいから，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ としてよい．

  $k > 0$ ならば楕円であり，$k = 0$ ならば 1 点 O であり，$k < 0$ ならば空集合である．

- λ_1, λ_2 が異符号のとき：

  $k \neq 0$ ならば双曲線であり，$k = 0$ ならば 2 本の直線である．

(1.8) が楕円または双曲線であるとき，両辺を k（または $-k$）で割って

$$\mathit{\Gamma} : \left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\beta}\right)^2 = 1 \quad \text{もしくは} \quad \mathit{\Gamma} : \left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{Y}{\beta}\right)^2 = \pm 1 \tag{1.8$'$}$$

という形まで式変形することもよくある．

次に，$\underline{\lambda_1, \lambda_2 \text{ の一方が } 0 \text{ の場合}}$ を考えよう．今ここでは $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ とする．やはり適当な平行移動による座標変換 $\begin{cases} X = x' + \xi \\ Y = y' + \eta \end{cases}$ により，方程式 (1.7) は

$$\mathit{\Gamma} : \lambda_1 X^2 + b_2' Y = 0 \tag{1.9}$$

と表すことができる．これは，$b_2' \neq 0$ ならば放物線の方程式であり，$b_2' = 0$ ならば 1 本の直線を表す．$b_2' \neq 0$ ならば (1.9) もまた，通常

$$\mathit{\Gamma} : Y = \alpha X^2 \tag{1.9$'$}$$

のような形で表す．

いずれにせよ，2 次曲線 (1.6) は，座標系 (X, Y) を用いれば (1.8) または (1.9)（もしくは (1.8$'$), (1.9$'$)）で表され，注目すべきは 2 つの座標系 (x, y) と (X, Y) が直交変換と平行移動の違いしかないことである．

これは「2 次曲線は楕円，双曲線，放物線のいずれかであり，適当な座標系を用いれば (1.8) や (1.9) の形に表すことができる」ことを意味する．ひとつ例を見ておこう．

例 5. 2 次曲線

$$\mathit{\Gamma} : 5x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$$

を考える．直交変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{すなわち} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

により

$$\mathit{\Gamma} : (x')^2 + 6(y')^2 + 4 \cdot \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}} - 8 \cdot \frac{-2x' + y'}{\sqrt{5}} - 5 = 0$$

と表すことができる．$\mathit{\Gamma} : (x')^2 + 6(y')^2 + 4\sqrt{5}x' - 5 = 0$ と整理でき，更に

$$\mathit{\Gamma} : (x' + 2\sqrt{5})^2 + 6(y')^2 = 25$$

と式変形できる．これは楕円である．そして更に（平行移動による）座標変換 $\begin{cases} X = x' + 2\sqrt{5} \\ Y = y' \end{cases}$ により

$$\Gamma : X^2 + 6Y^2 = 25$$

と表すことができる．

2 次曲線を (1.8) や (1.9) で表すこと（もしくは $(1.8')$ や $(1.9')$ で表すこと）を「2 次曲線を標準形で表す」と言い表す．

問 6. 次の 2 次曲線を，適当な変数の直交変換と平行移動により，標準形で表せ．

(1) $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ (2) $x^2 - 2xy + y^2 + 5x + y - 2 = 0$
(3) $7x^2 - 8xy + 13y^2 - 5\sqrt{5}\,x + 20\sqrt{5}\,y + 5 = 0$

• n 変数の 2 次形式

2 変数の場合に説明した 2 次形式に関する事がらの大半は n 変数でも同様に成り立つ．
n 変数の 2 次形式 $q = q(\boldsymbol{x})$ は，n 次対称行列 A を用いて $q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表すことができる．

例題 7. 次の 2 次形式を，対称行列を用いて表せ．

(1) $q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$

(2) $q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4)^2 - x_2x_3$

(解答). (1)

$$q_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$q_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

□

定理 2 の内容は n 変数でも全く同様である．具体的には次のように述べられる．

定理 8. n 変数の 2 次形式 $q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は，適当な変数の直交変換 $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ により

$$q = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 \tag{1.10}$$

と表せる．ここに λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は A の固有値である．

定理 9. $q = q(\boldsymbol{x})$ を 2 次形式とする．この q が対称行列 A を用いて $q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表され，A のすべての固有値は $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ というように番号付けされているとする．

$\boldsymbol{x}$ が $|\boldsymbol{x}| = 1$ (すなわち $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$) を満たしながら変化するとき，$q$ の値域は $\lambda_1 \leq q \leq \lambda_n$ である．

最小値 λ_1 をとるのは，$\boldsymbol{x}$ が A の固有値 λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ ($|\boldsymbol{v}_1| = 1$) のとき，

最大値 λ_n をとるのは，$\boldsymbol{x}$ が A の固有値 λ_n に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_n$ ($|\boldsymbol{v}_n| = 1$) のときである．

(証明). 直交変換 $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ により，q を標準形に表したうえで考える．

$\boldsymbol{x}$ が $|\boldsymbol{x}| = 1$ を満たしながら変化することは，$\boldsymbol{x}'$ が $|\boldsymbol{x}'| = 1$ を満たしながら変化することに等しいことに注意して

$$\begin{aligned} q &= \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 \\ &\geq \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_1(x_2')^2 + \cdots + \lambda_1(x_n')^2 = \lambda_1\left\{(x_1')^2 + (x_2')^2 + \cdots + (x_n')^2\right\} = \lambda_1 \end{aligned}$$

すなわち $\lambda_1 \leq q$ を得る．等号が成立するのは

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x_2')^2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_1)(x_n')^2 = 0$$

のときである．したがって，最小固有値 λ_1 が単根，つまり $\lambda_1 < \lambda_2$ ならば，等号が成立するのは $x_2' = \cdots = x_n' = 0$ のとき，すなわち $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1\}$ のときである．最小固有値 λ_1 が重根，つまり $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_j < \lambda_{j+1}$ ならば，等号が成立するのは $x_{j+1}' = \cdots = x_n' = 0$ のとき，すなわち $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j\}$ のときである．いずれにせよ，$\boldsymbol{x} = T^{-1}\boldsymbol{x}'$ が固有値 λ_1 に対する固有空間に属するときといえる．

以上より，q の最小値は λ_1 であり，その値をとるのは固有値 λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ ($|\boldsymbol{v}_1| = 1$) のときであることが示された．

q の最大値が λ_n であり，その値をとるのは固有値 λ_n に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_n$ ($|\boldsymbol{v}_n| = 1$) のときであることも同様に確かめられる．(読者自ら示されたい．) □

問 10. $x_1^2 + x_2^2 = 1$ のとき，次の 2 次形式の最大値・最小値を求めよ．
(1) $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ (2) $4x_1 - 12x_1x_2 + 13x_2^2$

問 11. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ のとき，次の 2 次形式の最大値・最小値を求めよ．
(1) $3x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_3$ (2) $2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3$

• 正定値性

定義 12. $q = q(\boldsymbol{x})$ を 2 次形式とする．

- 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ が成り立つとき，2 次形式 q は**半正定値** (positive semi-definite) であるという．さらに，半正定値 2 次形式 q が，$q(\boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限るとき，q は**正定値** (positive definite) であるという．
- 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ が成り立つとき，2 次形式 q は**半負定値** (negative semi-definite) であるという．さらに，半負定値 2 次形式 q が，$q(\boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限るとき，q は**負定値** (negative definite) であるという．

- $q(\boldsymbol{x})$ の値が正にも負にもなり得るとき，2 次形式 q は**不定値** (indefinite) であるという．

n 次対称行列 A も，対応する 2 次形式 $q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が（半）正定値,（半）負定値，不定値であるかに応じて，**（半）正定値,（半）負定値，不定値**であると言い表す．

命題 13. A を n 次対称行列とし，A のすべての固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする．
(1) A が半正定値 $\iff \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0.$
(2) A が正定値 $\iff \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0.$

(証明). (1) A から作られる 2 次形式を $q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とする．また，直交変換 $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ により q は標準形 $q = \lambda_1(x_1')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2$ に表されるとする．

まず,「すべての $j = 1, \ldots, n$ で $\lambda_j \geq 0$」 ならば「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ である」ことは明らかである．逆に「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ である」としたとき，$\boldsymbol{x}$ として $\boldsymbol{x} = T^{-1}\boldsymbol{e}_j$ (ここに，$\boldsymbol{e}_j$ は基本ベクトル) を考えれば $0 \leq q(T^{-1}\boldsymbol{e}_j) = \lambda_j$ を得る．

(2) (1) の証明において等号付の不等号の等号をとればよい． □

問 14. 次の行列が（半）正定値,（半）負定値，不定値のどれであるか調べよ．

$$(1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \quad (3)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \quad (4)\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

命題 15. 2 次の対称行列 $A = \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ が正定値であるためには,「$a > 0$ かつ $\det A > 0$」であることが必要十分である．

正定値の条件は「$c > 0,\ \det A > 0$」でもよい．

(証明).

$$\begin{aligned}
A \text{ が正定値} &\iff A \text{ の固有値 } \lambda_1, \lambda_2 \text{ が共に正}\\
&\iff A \text{ の固有方程式 } \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0 \text{ の 2 根が正}\\
&\iff a + c > 0,\ ac - b^2 > 0\\
&\iff a > 0,\ ac - b^2 > 0.
\end{aligned}$$

□

命題 15 を含む事実が，一般の n 次の場合でも成立する．それは次のように述べられる．

定理 16. n 次の対称行列 $A = (a_{ij})$ が正定値であるためには，

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix} > 0,\ \ldots\ldots,\ \det A > 0$$

であることが必要十分である．

問 1 の答 (1) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

問 3 の答 (1) $\boldsymbol{x}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ により，$q = (x')^2 + 6(y')^2$.

(2) $\boldsymbol{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ により，$q = 4(x')^2 - 2(y')^2$.

(3) $\boldsymbol{x}' = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ により，$q = 10(x')^2$.

(4) $\boldsymbol{x}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ により，$q = 4(x')^2 - (y')^2$.

問 6 の答 (1) $3(x')^2-(y')^2 = 1$ (双曲線) (2) $X^2+(3\sqrt{2}/2)Y = 0$ (放物線) (3) $X^2+3Y^2 = 27/4$ (楕円)

問 10 の答 (1) 最大値 3 ($\boldsymbol{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき)；最小値 -1 ($\boldsymbol{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき)

(2) 最大値 16 ($\boldsymbol{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき)；最小値 1 ($\boldsymbol{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき)

問 11 の答 (1) 最大値 4 ($\boldsymbol{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき)；最小値 -1 ($\boldsymbol{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき)

(2) 最大値 3 ($\boldsymbol{x} = \dfrac{c_1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2 は $c_1^2 + c_2^2 = 1$ なる定数) のとき)

最小値 -2 ($\boldsymbol{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき)

問 14 の答 (1) 不定値 (2) 正定値 (3) 半正定値 (4) 正定値