

外積と右手系

空間ベクトルの外積の幾何学的な性質として、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はこの順で右手系をなすことを述べた (p.19, 20, 定理 1.61 (3)). ここでは、この証明を目標にするが、まず一般に次の状況を考える:

命題 1. 同一平面内でない空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について、次は同値である.

(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がこの順で右手系をなす.

(2) $\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) > 0$.

(証明). $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とし、それぞれの始点を原点にとる. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を含む

平面 π は、原点を通り $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ に垂直であるから、その方程式は $\pi: (a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0$ となる. $A = a_2b_3 - a_3b_2, B = a_3b_1 - a_1b_3, C = a_1b_2 - a_2b_1$ とおいて

$$\pi: Ax + By + Cz = 0$$

と簡潔にかいておこう.

今、仮定より $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行にはなり得ないから、 A, B, C のうち少なくとも 1 つは 0 でない. ここでは、 $C \neq 0$ の場合を考える ($A \neq 0, B \neq 0$ の場合も同様). このとき、

$$\pi: z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y$$

と変形することができる.

次に、 $\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. つまり、ベクトル $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ はそれぞれ、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の xy 平

面への射影である. $\mathbf{a}'$ と $\mathbf{b}'$ のなす角 θ' とする. ただし、 $z > 0$ の領域から xy 平面を見たとき、 $\mathbf{a}'$ から反時計回りの向きを正とし、 $-180^\circ < \theta' \leq 180^\circ$ とする. $C = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ であるから、 $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ は平行でない. よって、 $\theta' \neq 0^\circ, 180^\circ$ である. xy 平面上で $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ の張る平行四辺形の面積 S を考えると、Web「2 次の行列式の符号」の系 1 より、

$$S = \begin{cases} C & (\theta' > 0) \\ -C & (\theta' < 0) \end{cases}$$

となる. つまり、 C の符号と θ' の符号は一致する.

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とする. ただし、領域 $z > -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y$ (平面 π の上側の領域) から見たとき、 $\mathbf{a}$ から反時計回りの向きを正とし、 $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$ とする. このとき、

$$\theta > 0^\circ \iff \theta' > 0^\circ \iff C > 0$$

である.

$C > 0$ のとき, $0^\circ < \theta < 180^\circ$. θ は通常の意味での, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角と一致する. 従って, このとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がこの順で右手系をなすことは, 座標空間内で, $\mathbf{c}$ が平面 π の上側にある, すなわち,

$$c_3 > -\frac{A}{C}c_1 - \frac{B}{C}c_2 \iff Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 > 0$$

と同値である. 一方, $\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$ の第 3 列における展開を考えると

$$\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = Ac_1 + Bc_2 + Cc_3$$

となるので, 今の場合 ($C > 0$) のとき,

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ がこの順で右手系をなす} \iff \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) > 0$$

が示された.

$C < 0$ の場合も同様にして, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がこの順で右手系をなすことは, 座標空間内で $\mathbf{c}$ が平面 π の下側にあること:

$$c_3 < -\frac{A}{C}c_1 - \frac{B}{C}c_2 \iff Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) > 0$$

と同値であることがわかる. □

さて, 定理 1.61 (p.19,20) の (3) を証明しよう. $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でなかったので, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$. また, 第 1 章における 3 次の行列式の定義により,

$$\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0.$$

従って, 命題 1 により, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はこの順で右手系をなす.