点と平面の距離の公式

座標平面における点と直線の距離の公式を復習しよう．点 $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ と直線 ℓ： $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であった．座標空間における点と平面の距離についても類似の式が成り立つ：

定理 1. **(点と平面の距離の公式)** 点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ と平面 π: $ax+by+cz+d=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{1.1}$$

(証明)．点 A が平面 π 上にあるときは，$ax_0+by_0+cz_0+d=0$ なので，(1.1) は成立する．

点 A が平面 π 上にないとき，点 A から平面 π に下ろした垂線の足を $\mathrm{P}(x', y', z')$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，平面 π に垂直であるから，t をある実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x'-x_0 = at \\ y'-y_0 = bt \\ z'-z_0 = ct \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x_0+at \\ y' = y_0+bt \\ z' = z_0+ct \end{cases}$$

と表すことができる．点 P は平面 π 上にあるから，

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0.$$

これを t について解くと，$t = -\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$ となる．従って，求める距離は,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| &= \left| t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| = |t|\cdot\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

となる． □

例題 2. 次を求めよ．

(1) 点 $(1,2,3)$ と平面 $4x-5y-3z-5=0$ の距離

(2) 平行な 2 平面 $x-2y+z+1=0$, $x-2y+z-5=0$ の距離

(解答)．(1) $\dfrac{|4\cdot1-5\cdot2-3\cdot3-5|}{\sqrt{4^2+(-5)^2+(-3)^2}} = \dfrac{|-20|}{\sqrt{50}} = \dfrac{20}{5\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

(2) 平面 $x-2y+z+1=0$ 上の任意の点，例えば $(-1,0,0)$ と平面 $x-2y+z-5=0$ の距離を求めればよい．従って，求める距離は,

$$\frac{|-1-2\cdot0-0-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

□

問 3. 次を求めよ．

(1) 点 $(4,7,-3)$ と平面 $x+2y+2z+3=0$ の距離 (答 5)

(2) 平行な 2 平面 $3x+y+2z+13=0$, $3x+y+2z-1=0$ の距離 (答 $\sqrt{14}$)