

球面の方程式

座標平面における円の方程式について復習しよう. 点 $P_0(x_0, y_0)$ を中心とする半径 $r(> 0)$ の円 (もしくは円周) とは, 点 P_0 からの距離が r の点全体のなす集合で, その方程式は,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

で与えられた.

座標空間においても同様に,

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を中心とする半径 $r(> 0)$ の球面 S

を考える. これは, 点 P_0 からの距離が r の点全体のなす集合である.

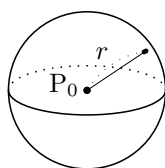


図 1: 点 P_0 を中心とする半径 r の球面 S

球面 S 上の任意の点を $P(x, y, z)$, 点 P_0, P の位置ベクトルをそれぞれ, $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}$ とすると, つねに, $|\overrightarrow{P_0P}| = r$ であるから,

$$|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0| = r \quad (1.1)$$

となる. これを球面 S のベクトル方程式という. ここで, $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ を (1.1) の両辺を 2 乗した式に代入することにより, 次を得る:

命題 1. 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を中心とする半径 r の球面 S の方程式は,

$$S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \quad (1.2)$$

例題 2. 点 $P_0(2, 1, -2)$ を中心とし, 原点 O を通る球面 S の方程式を求めよ.

(解答). 球面 S の半径を r とすると, $r^2 = |\overrightarrow{OP_0}|^2 = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$ であるから, 求める球面の方程式は, $S : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. $\square$

問 3. 次の球面の方程式を求めよ.

(1) 点 $P_0(2, -3, 4)$ を中心とする半径 3 の球面.

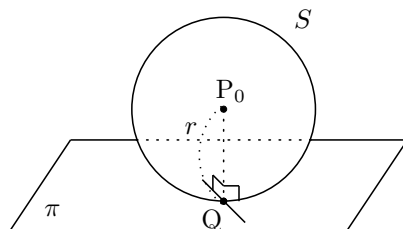
(2) 点 $P_0(1, 3, 2)$ を中心とし, 点 $Q(3, 1, -1)$ を通る球面.

[答 (1) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 9$ (2) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 17$]

例題 4. 点 $P_0(1, 2, 3)$ を中心とし, 平面 $\pi : 3x + y + 2z + 3 = 0$ に接する球面 S について次の問に答えよ.

(1) 平面 π と球面 S の接点の座標を求めよ.

(2) 球面 S の方程式を求めよ.



(解答). (1) 接点を Q とおくと, $\overrightarrow{P_0Q}$ は, この平面の法線ベクトルであるから, $\overrightarrow{P_0Q} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

とおくことができる. すると,

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より, $Q(1+3t, 2+t, 3+2t)$ となる. 点 Q は平面 π 上にあるので,

$$3(1+3t) + (2+t) + 2(3+2t) + 3 = 0, \quad 14t + 14 = 0$$

より $t = -1$ となる. よって接点 Q の座標は $(-2, 1, 1)$ である.

(2) 球面 S の半径を r とすると,

$$r^2 = |\overrightarrow{P_0Q}|^2 = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14.$$

よって求める球面の方程式は, $S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14.$ □

問 5. 平面 $2x - y + 2z - 7 = 0$ に点 $(3, 1, 1)$ で接する半径 3 の球面の方程式を求めよ.

$$\begin{aligned} & \text{[答 } (x-5)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9 \\ & (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9] \end{aligned}$$