

空間における直線の位置関係

空間における平面と直線の位置関係に関する問題は第1章で、平面と平面の位置関係に関する問題は第3章で扱われている。ここでは、空間における直線の位置関係に関する問題を見てみよう。

まず、2直線 ℓ_1, ℓ_2 の方向ベクトルが平行でない場合を見る。この場合、 ℓ_1, ℓ_2 の位置関係として考えられるのは、「1点で交わる (共有点がある)」か「ねじれの位置にある (共有点がない)」のいずれかである。

例題 1. 2直線 $\ell_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{3}$, $\ell_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ の位置関係を調べよ。

(解答). ℓ_1 の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と ℓ_2 の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は平行でないから、 ℓ_1, ℓ_2 の位置関係として考えられるのは、「1点で交わる (共有点がある)」か「ねじれの位置にある (共有点がない)」のいずれかである。

ℓ_1, ℓ_2 はそれぞれ t_1, t_2 をパラメーターとして、

$$\ell_1: \begin{cases} x = 7 + t_1 \\ y = 1 - 2t_1 \\ z = 3 + 3t_1 \end{cases}, \quad \ell_2: \begin{cases} x = 1 + t_2 \\ y = -1 + 2t_2 \\ z = -t_2 \end{cases}$$

と表すことができる。これらから得られる連立方程式

$$\begin{cases} 7 + t_1 = 1 + t_2 \\ 1 - 2t_1 = -1 + 2t_2 \\ 3 + 3t_1 = -t_2 \end{cases}$$

を同時に満たす実数 t_1, t_2 が存在するとき2直線は交わり、そうでなければねじれの位置にある。

第1, 2式から、 $\begin{cases} t_1 - t_2 = -6 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$ である。これを解いて、 $t_1 = -\frac{5}{2}$, $t_2 = \frac{7}{2}$ 。

すると、 $3 + 3t_1 = 3 - \frac{15}{2} = -\frac{9}{2} \neq -t_2 = -\frac{7}{2}$ となり第3式を満たさないので、2直線 ℓ_1, ℓ_2 はねじれの位置にある。□

今度は2直線 ℓ_1, ℓ_2 の方向ベクトルが平行な場合を見る。この場合、 ℓ_1, ℓ_2 の位置関係として考えられるのは、「平行 (共有点がない)」か「一致 (共有点は無限個)」のいずれかである。

例題 2. 2直線 $\ell_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{6}$, $\ell_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-3}$ の位置関係を調べよ。

(解答). ℓ_1 の方向ベクトル $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ と ℓ_2 の方向ベクトル $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ は、 $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$ となるから平行である。よって、 ℓ_1, ℓ_2 の位置関係として考えられるのは、「平行 (共有点がない)」か「一致 (共有点は無限個)」のいずれかである。

ℓ_1, ℓ_2 はそれぞれ t_1, t_2 をパラメーターとして,

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 3 + 4t_1 \\ y = 2t_1 \\ z = 3 + 6t_1 \end{cases}, \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t_2 \\ y = -1 - t_2 \\ z = -3t_2 \end{cases}$$

と表すことができる. これらから得られる連立方程式

$$\begin{cases} 3 + 4t_1 = 1 - 2t_2 \\ 2t_1 = -1 - t_2 \\ 3 + 6t_1 = -3t_2 \end{cases}$$

を満たす実数 t_1, t_2 が存在するとき 2 直線は一致, そうでなければ平行である. 第 1, 2, 3 式とも, $2t_1 + t_2 = -1$ と同値になるので, 連立方程式を満たす実数 t_1, t_2 の組は無数に存在する. したがって, 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 は一致する. $\square$

問 3. 次の 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 の位置関係を調べよ.

$$(1) \ell_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}, \ell_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-7}{1}$$

$$(2) \ell_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+3}{6}, \ell_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{6}$$

答 (1) 点 (5, 7, 9) で交わる. (2) 平行