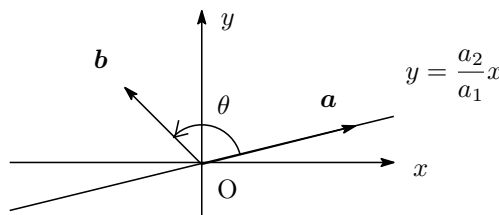


2 次の行列式の符号

2 次の行列式の符号に関する第 1 章の命題 1.53 (p.18) を証明しよう.

(命題 1.53 の証明). $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の始点を原点にとり, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とする.

まず $a_1 > 0$ のときを考える. $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ への角 θ が $0^\circ < \theta (< 180^\circ)$ となるのは, ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でない
 $\mathbf{b}$ が座標平面上の領域 $y > \frac{a_2}{a_1}x$ にあることと同値である. ので $\theta \neq 180^\circ$ である.



このとき, $b_2 > \frac{a_2}{a_1}b_1$ ゆえ $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$, すなわち $\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) > 0$ となる.

次に $a_1 < 0$ のときを考える. $\theta > 0^\circ$ となるのは, ベクトル $\mathbf{b}$ が座標平面上の領域 $y < \frac{a_2}{a_1}x$
 にあることと同値である. このとき, $b_2 < \frac{a_2}{a_1}b_1$ となるので, $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$, すなわち $\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) > 0$ となる.

最後に, $a_1 = 0$ のときを考える. $a_2 > 0$ のとき, $\theta > 0^\circ$ は $b_1 < 0$ と同値, $a_2 < 0$ のとき,
 $\theta > 0^\circ$ は $b_1 > 0$ と同値であることがわかる. 従って, いずれの場合も $a_2b_1 < 0$, すなわち $\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) > 0$ となる. □

命題 1.49 (p.17) と命題 1.53 (p.18) から, 次の系が直ちに従う.

系 1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を平行でない平面ベクトルとし, $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ への角を θ ($-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$) とする.
 このとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平行四辺形の面積 S は

$$S = \begin{cases} \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) & (\theta > 0) \\ -\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) & (\theta < 0) \end{cases}$$

となる.