3 次の行列式の展開

3 次の正方行列 A に対して，第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる行列を A_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ とおく．例えば，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき，

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

である．このとき，次が成立する:

命題 1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする．$k = 1, 2, 3$ に対して，

$$|A| = (-1)^{k+1} a_{k1}|A_{k1}| + (-1)^{k+2} a_{k2}|A_{k2}| + (-1)^{k+3} a_{k3}|A_{k3}| \tag{1.1}$$

が成り立つ．これを $|A|$ の**第 $\boldsymbol{k}$ 行における展開**という．

また，$l = 1, 2, 3$ に対して，

$$|A| = (-1)^{1+l} a_{1l}|A_{1l}| + (-1)^{2+l} a_{2l}|A_{2l}| + (-1)^{3+l} a_{3l}|A_{3l}| \tag{1.2}$$

が成り立つ．これを $|A|$ の**第 $\boldsymbol{l}$ 列における展開**という．

(1.1), (1.2) は右辺を具体的に計算することで確かめられるので，読者自ら取り組んでほしい．なお，第 4 章で命題 1 を含む形の定理を紹介する.

例 2. 第 1 行における展開:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

第 3 列における展開:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2 次の行列式の性質 (p.19, 問 1.57) と同様のことが 3 次の行列式 (実は一般の行列式) に対しても成り立つことが，直接計算からわかる:

命題 3. 3 次の行列式について次が成り立つ.

(1) 行列の行と列を入れ換えても (転置しても) 行列式は変わらない:

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

(2) 行列式は 2 つの列 (または 2 つの行) を交換すると符号が逆になる:
例えば，第 1 列と第 2 列を交換すると，

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

(3) 2 つの列 (または 2 つの行) が等しい行列の行列式は 0 になる:
例えば，第 1 列と第 2 列が等しいとき，

$$\begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5}$$

問 4. 式 (1.3)，(1.4)，(1.5) を確かめよ.

外積の覚え方として，次のように 3 次の行列式を形式的に利用したものを紹介しよう.
$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を座標空間の基本ベクトルとする．このとき，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

と覚えることができる．ここで，(1.6) の右辺は形式的な行列式で，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように第 1 列において展開して，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に等しいものと理解できる.

例題 5. 命題 3 の (3) を用いて，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ が直交することを確かめよ.

(解答). $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

これは 3 次の行列式 $\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})$ の第 1 列における展開と一致するが,命題 3 (3) より 0 である.従って,$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$ で,$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交する. □

問 6. 命題 3 の (3) を用いて,$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交することを確かめよ.