

線形性再論

● 1 次変換の特徴付け

1 次変換の基本的な性質に線形性があった (第 2 章, 命題 2.44). 実は, これこそが 1 次変換を特徴付ける性質なのである.

命題 1. 任意の平面ベクトル $\mathbf{x}$ に対して, もう 1 つのベクトル $f(\mathbf{x})$ を対応させる規則 f があって, 次の 2 つの性質 (線形性):

$$\begin{aligned}(1) \quad & f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \\(2) \quad & f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \quad (k \text{ は任意のスカラー})\end{aligned}\tag{1.1}$$

を満たすとする. このとき,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\tag{1.2}$$

を満たす 2 次行列 A がただ 1 つ存在する.

(証明). (1.2) を満たす行列 A の存在: 平面の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対して,

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

と表されるから, 線形性 (1.1) より,

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = xf(\mathbf{e}_1) + yf(\mathbf{e}_2) \\&= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

従って, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ が成り立つ.

(1.2) を満たす行列 A の一意性: $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ かつ $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ が任意の $\mathbf{x}$ について成り立つと仮定する. このとき, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2$) とすると,

$$A\mathbf{e}_1 = B\mathbf{e}_1 \quad \text{かつ} \quad A\mathbf{e}_2 = B\mathbf{e}_2$$

であるが, この第 1 式は A と B の第 1 列が一致することを, 第 2 式は A と B の第 2 列が一致することを, それぞれ示している. よって $A = B$ である. $\square$

上の命題 1 と, 第 2 章の命題 2.44 をまとめると, 次のことがいえる.

定理 2. 2 次行列 A によって定まる 1 次変換と, 線形性 (1.1) を満たす平面ベクトルの変換 $f(\boldsymbol{x})$ とは, 1 対 1 に対応する. 両者の対応関係は,

$$\begin{aligned} A &\longmapsto f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \\ A = (f(\boldsymbol{e}_1) \ f(\boldsymbol{e}_2)) &\longleftarrow f(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

となる.

第 2 章の命題 2.34 で求めた回転を表す行列は, 次のように線形性を利用して求めることもできる.

例 3. 原点を中心とする角度 θ の回転を f とする. f は線形性を満たすベクトルの変換である. (図 1 を参照.) f による $\boldsymbol{e}_1$ の像は

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

であり, $\boldsymbol{e}_2$ の像は

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ + \theta) \\ \sin(90^\circ + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

である. 従って, f を表す行列は,

$$(f(\boldsymbol{e}_1) \ f(\boldsymbol{e}_2)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である.

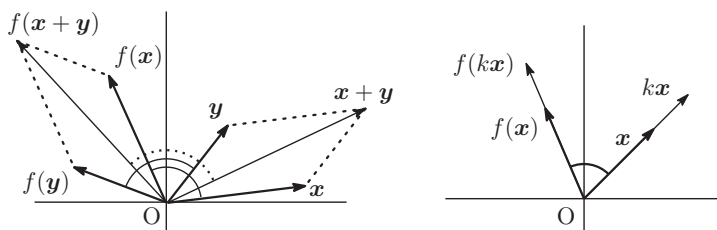


図 1: 回転の線形性: 左図 $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, 右図 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$.

● 1 次変換による直線の像

線形性を利用して, 平面の 1 次変換によって直線がどのような図形に移るかを調べよう.

例題 4. 次の行列 A が表す 1 次変換 f によって直線 $\ell: x + y = 1$ が移る図形を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(解答). 最初に, 直線 ℓ のパラメーター表示を求める. 直線 ℓ は点 $(1, 0)$ を通り, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行な直線だから, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ として,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d} \quad (t \text{ はパラメーター})$$

とパラメーター表示できる. この $\mathbf{x}$ に行列 A が表す 1 次変換 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を施すと, 線形性から,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p} + t\mathbf{d}) = f(\mathbf{p}) + tf(\mathbf{d}) = A\mathbf{p} + tA\mathbf{d}$$

となる.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ のとき, 上の式を用いて計算すると,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

となる. よってこの場合, 直線 ℓ は, 1 次変換 f によって点 $(1, 2)$ を通り, ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ に平行な直線に移される. $x = 1 - t$, $y = 2 - 3t$ からパラメーター t を消去してこの直線の方程式を求めると, $3x - y = 1$ である. よって, 直線 ℓ は f によって直線 $3x - y = 1$ に移される.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, (1) と同様にして計算すると,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である. よって, 直線 ℓ は f によって 1 点 $(1, 2)$ に移される. □

問 5. 次のそれぞれの場合に, A が表す 1 次変換によって直線 $\ell: 2x - y + 1 = 0$ が移る図形を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = 45^\circ \text{ の回転行列}$$

注意 6. 一般に, $|A| \neq 0$ のとき, A が表す 1 次変換によって, 直線は直線に移る. 一方, $|A| = 0$ のときは, A が表す 1 次変換によって 1 点に移されるような直線が必ず存在する.

● 1 次変換による平面の像

次に, 1 次変換によって xy 平面全体がどのような図形に移るかを考えよう.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \ \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とおく. xy 平面の任意の点 (x, y) の位置ベクトル $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ に対して, 第 2 章の命題 2.46 より,

$$A\mathbf{x} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

である. つまり, A が表す 1 次変換によって, 平面ベクトル全体は,

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

という形のベクトル全体に移る. これより, 次のことが分かる. まず, $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ならば, A によって xy 平面は原点 $(0, 0)$ に移る. そこで以下では $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ または $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ とする.

- (1) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行でないならば, A によって xy 平面は xy 平面に移る.
- (2) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行ならば, A によって xy 平面は原点を通る直線に移る. その直線は, $\mathbf{a}$ または $\mathbf{b}$ の $\mathbf{0}$ でない方に平行である.

注意 7. 上の (1) の場合は $|A| \neq 0$ であり, (2) の場合は $|A| = 0$ である.

例題 8. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換によって, xy 平面は直線 $y = x$ に移ることを示せ.

(解答). 任意の平面ベクトル $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ に対して,

$$A\mathbf{x} = xA\mathbf{e}_1 + yA\mathbf{e}_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (x + 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t = x + 2y)$$

である. よって, A が表す 1 次変換によって xy 平面は原点を通りベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線 $y = x$ に移る. □

問 9. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換によって, xy 平面は直線 $y = 2x$ に移ることを示せ.

● 問の略解

問 5 (p.3) (1) 直線 $x + y = 0$ (2) 点 $(-2, 1)$ (3) 直線 $3x + y + \sqrt{2} = 0$

問 9 (p.4) $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ に対して, $A\mathbf{x} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (x + 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. よって, A が表す 1 次変換によって xy 平面は直線 $y = 2x$ に移る.