

行列の分割表示

ここでは、行列を次の例のように4つの行列で分割表示した場合の演算について説明する。

例 1.

$$X = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right)$$

において、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

とおくと、 X は

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と分割表示される。

例 2.

$$Y = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

において、

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 Y は

$$Y = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

と分割表示される。

この形の分割表示を用いた行列の積の計算法を述べよう。

命題 3. X を $m \times l$ 行列、 Y を $l \times n$ 行列とし、それぞれ

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

と分割表示する。このとき、 $(A \text{ の列の数}) = (P \text{ の行の数})$ であれば、

$$XY = \begin{pmatrix} AP + BR & AQ + BS \\ CP + DR & CQ + DS \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

つまり、このように分割表示された行列の積は、2 次行列の積と同じ規則で計算できるわけである。

この命題の証明は省略するが、次の例で命題の主張が成り立つことを確認しておこう。

例 4. 例 1 の行列 X と例 2 の行列 Y に対して、上の命題を用いて XY を求めると、

$$\begin{aligned}
 XY &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{cccc} 8 & 2 & 5 & 5 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \\ 16 & 10 & 13 & 13 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

となる。読者は、これが XY を (分割表示を用いずに) 定義通りに計算した結果と一致することを確認されたい。

問 5. 与えられた行列の分割表示を用いて次の積を計算せよ。ただし、(2), (3), (4) において、 A, B, C, D, X, Y は任意の n 次行列とする。

$$(1) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 7 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad (2) \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} I_n & -Y \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O_n \\ I_n & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & X \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

問 6. 正方行列 X が、正則行列 A と C を用いて

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

と分割表示されるとき、 X は正則行列であり、

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

であることを示せ。

• 問の略解

問 5 (p.2) (1) $\begin{pmatrix} 14 & 17 & 3 & -1 \\ 22 & 26 & 3 & -3 \\ 6 & 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} AC-BD & -(AD+BC) \\ AD+BC & AC-BD \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} A & AX-YB \\ O & B \end{pmatrix}$

問 6 (p.2) A を m 次行列, C を n 次行列とすると, $X = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{n,m} & C \end{pmatrix}$ は $(m+n)$ 次行列で, B は $m \times n$ 行列である. $Y = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O_{n,m} & C^{-1} \end{pmatrix}$ とおくと, $XY = \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BC^{-1}+BC^{-1} \\ O_{n,m} & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}$. 同様にして, $YX = I_{m+n}$. よって, $Y = X^{-1}$ である.