

行列の転置

$m \times n$ 行列 A に対して, その行と列を入れ換えて得られる $n \times m$ 行列を A の転置行列とよび, tA と表すのであった. (第4章, 定義 4.79 を参照.)

例 1. (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ のとき, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ である.

命題 2. 転置行列について, 次の性質が成り立つ.

(1) (tA の (i, j) 成分) = (A の (j, i) 成分) である.

(2) 任意の行列 A に対して, ${}^t({}^tA) = A$ である.

(3) 行列 A と B の積 AB が定義されるとき, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ である.

(4) A が正則行列であるとき, tA は正則行列であり, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である.

(証明). 性質 (1) と (2) は転置行列の定義から直ちに従う. 性質 (3) を示そう. $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列, $B = (b_{jk})$ を $n \times l$ 行列とする. まず, ${}^t(AB)$ と ${}^tB {}^tA$ のサイズが同じであることを確認する. AB は $m \times l$ 行列だから, ${}^t(AB)$ は $l \times m$ 行列である. 一方, tB は $l \times n$ 行列で tA は $n \times m$ 行列だから, ${}^tB {}^tA$ は $l \times m$ 行列である. よって, ${}^t(AB)$ と ${}^tB {}^tA$ のサイズは同じである. 次に, ${}^t(AB)$ と ${}^tB {}^tA$ の (i, j) 成分同士が等しいことを示す. まず性質 (1) より,

$${}^t(AB) \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = AB \text{ の } (j, i) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \quad (1.1)$$

である. 次に, ${}^tB {}^tA$ の (i, j) 成分は tB の第 i 行と tA の第 j 列の対応する成分の積の和であるが, 転置行列の定義から, これは B の第 i 列と A の第 j 行の成分の積の和となる. よって,

$${}^tB {}^tA \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \quad (1.2)$$

である. (1.1) と (1.2) を比べると, 両者は等しい. 以上より, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ である.

性質 (4) は性質 (3) を用いて次のように示せる. A を n 次正則行列とし, $B = A^{-1}$ とすると,

$$AB = I_n, \quad BA = I_n$$

である. この2式の両辺の転置をとると,

$${}^t(AB) = {}^tI_n, \quad {}^t(BA) = {}^tI_n$$

${}^tI_n = I_n$ であることに注意して性質 (3) を用いると,

$${}^tB {}^tA = I_n, \quad {}^tA {}^tB = I_n$$

である. すなわち, tA は正則行列であり, ${}^tB = {}^t(A^{-1})$ が tA の逆行列である. □