

1 次変換と行列式

2 次の行列式の持つ図形的意味を, 1 次変換を通して考えよう. 任意の 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平行四辺形の面積を $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と表す. ここで, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平行四辺形とは, 位置ベクトルが $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$ ($0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$) という形の点全体の集合のことである. これには, 特別な場合として面積が 0 の平行四辺形 (線分または 1 点) も含まれる. ここで, 第 1 章の命題 1.43 より,

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\det(\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{y})| \quad (1.1)$$

であることを思い出そう. 右辺は 2 次行列 $(\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{y})$ の行列式の絶対値である.

命題 1. 2 次行列 A が表す 1 次変換を考える. この 1 次変換によるベクトル $\boldsymbol{x}$ の像を $\boldsymbol{x}'$ とし, $\boldsymbol{y}$ の像を $\boldsymbol{y}'$ とすると, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平行四辺形は, $\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{y}'$ が張る平行四辺形に移り,

$$S(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = |\det A| \cdot S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ. ここで, $|\det A|$ は A の行列式の絶対値である.

(証明). 前半は 1 次変換の線形性から従う. 後半の平行四辺形の面積に関する主張を示す. $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ と行列の積の定義より,

$$(\boldsymbol{x}' \ \boldsymbol{y}') = (A\boldsymbol{x} \ A\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{y})$$

である. 両辺の行列式をとり, 第 4 章の定理 4.78 を用いると,

$$\det(\boldsymbol{x}' \ \boldsymbol{y}') = \det A \cdot \det(\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{y})$$

である. 式 (1.1) に注意して, この両辺の絶対値をとると,

$$S(\boldsymbol{x}' \ \boldsymbol{y}') = |\det A| \cdot S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

となる. □

この命題は, A の行列式の絶対値 $|\det A|$ は, A が表す 1 次変換による平行四辺形の面積の拡大率を表すということをいっている. 特に, $\det A = 0$ ならば, A によって, 任意の平行四辺形は面積 0 の平行四辺形に潰れてしまうことが分かる.