基本行列と行列の基本変形

本節では，基本行列と行列の基本変形の関係について解説する．この関係は，計算技術という側面よりも，むしろ理論的な側面において重要である．

● 基本行列

連立 1 次方程式を解いたり逆行列を求めたりするときに中心的な役割を担う計算方法として，行列の行基本変形を第 3 章で詳しく扱った．そのほかに，行列の列基本変形を考えることもできる．

定義 1. **行列の列基本変形**とは，以下の 3 種類の変形のことである．

(1) 1 つの列に 0 でない定数を掛ける．
(2) 2 つの列を入れ替える．
(3) 1 つの列の定数倍を他の列に加える．

行列の行基本変形と列基本変形を合わせて，単に**行列の基本変形**とよぶこともある．

列基本変形も行基本変形と同様に，可逆な変形である．すなわち，行列 A が列基本変形により B に変形されたとすると，B を列基本変形により A に変形することもできる．行列の基本変形は，次に紹介する基本行列と密接な関係がある．

定義 2. 以下の 3 種類の n 次行列を，n 次の**基本行列**とよぶ．

- $P_n(i;c)$: 単位行列 I_n の (i,i) 成分の 1 を c で置き換えた行列 (ただし $c \neq 0$)
- $P_n(i,j)$: 単位行列 I_n の (i,i) 成分と (j,j) 成分の 1 を 0 で置き換え，(i,j) 成分と (j,i) 成分の 0 を 1 で置き換えた行列 (ただし $i \neq j$)
- $P_n(i,j;c)$: 単位行列 I_n の (i,j) 成分の 0 を c で置き換えた行列 (ただし $i \neq j$)

これらは以下のような形をしている．

$$P_n(i;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \cdots & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$
P_n(i,j) = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ j) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & \cdots & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & \cdots & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

$$
P_n(i,j;c) = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & & j & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & \vdots & & \\
 & \cdots & 1 & \cdots & c & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

注意 3. (1) $P_n(i;1) = P_n(i,j;0) = I_n$ である．

(2) $P_n(i,j) = P_n(j,i)$ であるが，$c \neq 0$ なら $P_n(i,j;c) \neq P_n(j,i;c)$ である．

(3) p.85 の (3.20) で登場した 5 つの行列は，順に基本行列 $P_2(1;c), P_2(2;c), P_2(1,2), P_2(2,1;c)$, $P_2(1,2;c)$ である．

次の定理で見るように，行列の基本変形は，行列に基本行列を掛けることにより得られる．行基本変形は 基本行列を 左から，列基本変形は 基本行列を 右から 掛けることにより得られる．そのために，行基本変形は**左基本変形**，列基本変形は**右基本変形**とよばれることもある．

定理 4. (1) 行列の行基本変形は，行列に基本行列を左から掛けることにより得られる．具体的には，A を $m \times n$ 行列とし，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$ と行ベクトルを用いて分割表示するとき，以下が成り立つ．

(a) $P_m(i;c)A = \begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ c\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$. すなわち $P_m(i;c)A$ は，A の第 i 行を c 倍した行列である．

(b) $P_m(i,j)A = \begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$. すなわち $P_m(i,j)A$ は，A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である．

(c) $P_m(i,j;c)A = \begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$. すなわち $P_m(i,j;c)A$ は，A の第 j 行の c 倍を第 i 行に加えた行列である．

(2) 行列の列基本変形は，行列に基本行列を右から掛けることにより得られる．具体的には，A を $m \times n$ 行列とし，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトルを用いて分割表示するとき，以下が成り立つ．

(a) $AP_n(i;c) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \overbrace{c\boldsymbol{a}_i}^{i} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$. すなわち $AP_n(i;c)$ は，A の第 i 列を c 倍した行列である．

(b) $AP_n(i,j) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \overbrace{\boldsymbol{a}_j}^{i} & \cdots & \overbrace{\boldsymbol{a}_i}^{j} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$. すなわち $AP_n(i,j)$ は，A の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列である．

(c) $AP_n(i,j;c) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \overbrace{\boldsymbol{a}_i}^{i} & \cdots & \overbrace{c\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j}^{j} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$. すなわち $AP_n(i,j;c)$ は，A の第 i 列の c 倍を第 j 列に加えた行列である．

(証明). (1) $1 \leq i \leq m$ に対して $\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ とおき，直接計算することにより得られる (各自試みよ).

(2) $1 \leq j \leq n$ に対して $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ とおき，直接計算することにより得られる.

□

注意 5. 基本行列は以下に述べるように，単位行列を基本変形することで得られる.

(a) $P_n(i;c) = P_n(i;c)I_n$ より，$P_n(i;c)$ は I_n の第 n 行を c 倍した行列である.

(a') $P_n(i;c) = I_nP_n(i;c)$ より，$P_n(i;c)$ は I_n の第 n 列を c 倍した行列である.

(b) $P_n(i,j) = P_n(i,j)I_n$ より，$P_n(i,j)$ は I_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である.

(b') $P_n(i,j) = I_nP_n(i,j)$ より，$P_n(i,j)$ は I_n の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列である.

(c) $P_n(i,j;c) = P_n(i,j;c)I_n$ より，$P_n(i,j;c)$ は I_n の第 j 行の c 倍を第 i 行に加えた行列である.

(c') $P_n(i,j;c) = I_nP_n(i,j;c)$ より，$P_n(i,j;c)$ は I_n の第 i 列の c 倍を第 j 列に加えた行列である.

(c) や (c') を知っていると，$P_n(i,j;c)$ を掛けたときの基本変形が何かを覚えやすい.

例題 6. $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ のとき，$P_3(1;2)A$, $P_3(2,3)A$, $P_3(1,3;-5)A$ を計算せよ.

(解答).

$$P_3(1;2)A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$P_3(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

$$P_3(1,3;-5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

□

問 7. $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ のとき，$AP_3(1;2)$, $AP_3(2,3)$, $AP_3(1,3;-5)$ を計算せよ.

問 8. $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ のとき，$P_2(2;-7)A$, $P_2(2,1)A$, $P_2(2,1;6)A$, $AP_2(2;-7)$, $AP_2(2,1)$, $AP_2(2,1;6)$ を計算せよ.

任意の基本行列 P は逆行列 P^{-1} をもち，P^{-1} は P と同じ型の基本行列になる．より詳しく，以下の定理が成り立つ.

定理 9. 基本行列は正則である．さらに，以下の等式が成り立つ．

(a) $P_n(i;c)^{-1} = P_n(i;c^{-1})$ （ただし $c \neq 0$）

(b) $P_n(i,j)^{-1} = P_n(i,j)$

(c) $P_n(i,j;c)^{-1} = P_n(i,j;-c)$

(証明). 基本行列を掛けることの意味（定理 4）にもとづいて証明する．

(a) $P_n(i;c)P_n(i;c^{-1}) = P_n(i;c^{-1})P_n(i;c) = I_n$ を示せばよい．$P_n(i;c)P_n(i;c^{-1})$ は $P_n(i;c^{-1})$ の第 i 行を c 倍した行列だから，$P_n(i;c)P_n(i;c^{-1}) = I_n$ である．$P_n(i;c^{-1})P_n(i;c)$ は $P_n(i;c^{-1})$ の第 i 列を c 倍した行列だから，$P_n(i;c^{-1})P_n(i;c) = I_n$ である．

(b) $P_n(i,j)P_n(i,j) = I_n$ を示せばよい．$P_n(i,j)P_n(i,j)$ は $P_n(i,j)$ の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列だから，$P_n(i,j)P_n(i,j) = I_n$ である．

(c) $P_n(i,j;c)P_n(i,j;-c) = P_n(i,j;-c)P_n(i,j;c) = I_n$ を示せばよい．$P_n(i,j;c)P_n(i,j;-c)$ は $P_n(i,j;-c)$ の第 j 行の c 倍を第 i 行に加えた行列だから，$P_n(i,j;c)P_n(i,j;-c) = I_n$ である．$P_n(i,j;-c)P_n(i,j;c)$ は $P_n(i,j;-c)$ の第 i 列の c 倍を第 j 列に加えた行列だから，$P_n(i,j;-c)P_n(i,j;c) = I_n$ である．

□

注意 10. (1) 基本行列が正則であることは，行列の行基本変形や列基本変形が可逆な変形であることと対応している．行列 A, B と基本行列 P に対して，$PA = B$ と $P^{-1}B = A$ は同値であり，$AP = B$ と $BP^{-1} = A$ も同値である．言い換えると，A が 1 回の行 [列] 基本変形で B に変形できることと，B が 1 回の行 [列] 基本変形で A に変形できることは同値である．

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の基本変形は，左から基本行列 P を掛けて $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ へと変形することである．

(3) 基本行列が正則であることは，連立 1 次方程式の基本変形が同値な変形であることとも対応している．実際，P が基本行列なら (そしてさらに行列の積 PA が定義できれば) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ は同値である．

• 行列の掃き出し

基本変形を用いて行列を簡単な形に変形する系統的な方法として，以下の方法がある．

定義 11. $A = (a_{kl})$ を $m \times n$ 行列とし，(i,j) 成分 a_{ij} は 0 でないとする．

(1) **(i,j) 成分を要 (かなめ) として A の第 j 列を掃き出す**とは，以下に述べるような，A を A'' に変形する操作のことを言う．

(a) A の第 i 行を a_{ij}^{-1} 倍し，得られた行列を A' とする．ここに A' の (i,j) 成分は 1 である．

(b) A' において，$1 \leq k \leq m$, $k \neq i$ となる各 k について，第 i 行の $-a_{kj}$ 倍を第 k 行に加える．得られた行列を A'' とする．ここに A'' の第 j 列は

たとえば，k が小さい順に加えよ．実は，どのような順序で加えても結果は同じである．

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{array}{r} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．

(2) (i,j) **成分を要として** A **の第** i **行を掃き出す**とは，以下に述べるような，A を A'' に変形する操作のことを言う．

(a) A の第 j 列を a_{ij}^{-1} 倍し，得られた行列を A' とする．ここに A' の (i,j) 成分は 1 である．

(b) A' において，$1 \leq l \leq n$, $l \neq j$ となる各 l について，第 j 列の $-a_{il}$ 倍を第 l 列に加える．得られた行列を A'' とする．ここに A'' の第 i 行は

$${}^t\boldsymbol{e}_j = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & j & & & \\ & & & \smile & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

である．

注意 12. 列の掃き出しは，行基本変形のみを用いて行い，列基本変形は用いない．また，行の掃き出しは，列基本変形のみを用いて行い，行基本変形は用いない．

例題 13. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $(1,1)$ 成分を要として A の第 1 列を掃き出せ．

(2) $(3,2)$ 成分を要として A の第 3 行を掃き出せ．

(解答). (1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \times \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \quad \times(-5) \\ + \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & 12 & -16 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & \times\frac{1}{2} & \end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & -4 & 8\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & \times(-4) & + \\ + & \times(-5) & \end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & -2 & 8\\ 3 & 1/2 & -2\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}\end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix}12 & -2 & 16\\ 1/2 & 1/2 & -4\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

□

● 正則行列と基本行列

次の命題で述べるように，行列 A に行 [列] 基本変形を何回か施すことにより得られる行列は，A に左 [右] からある正則行列を掛けることによっても得られる．

命題 14. (1) 行列 A が何回かの行基本変形により B に変形されたとすると，ある正則行列 P が存在して $B = PA$ が成り立つ．

(2) 行列 A が何回かの列基本変形により B に変形されたとすると，ある正則行列 P が存在して $B = AP$ が成り立つ．

(3) 行列 A が何回かの行および列基本変形により B に変形されたとすると，ある正則行列 P と Q が存在して $B = PAQ$ が成り立つ．

(証明). (1) A が何回かの行基本変形により B に変形されたとすると，定理 4 (1) により基本行列 $P_1, \cdots, P_s$ を用いて $B = P_s \cdots P_1 A$ と表される．基本行列は正則 (定理 9) より，$P = P_s \cdots P_1$ とおけば P も正則であり，$B = PA$ となる．

(2)，(3) は (1) と同様である．各自試みよ． □

次の補題で述べるように，行列が零行列であることと，その階数が 0 であることは同値である．

補題 15. A を行列とし，$r = \operatorname{rank} A$ とおく．このとき，$A = O$ と $r = 0$ は同値である．

(証明). $A = O$ ならば，階数の定義により $r = 0$ である．

定理 3.19 (p.75) により，A は何回かの行基本変形を施すことで階段行列 B に変形される．さらにこのとき，$r = \operatorname{rank} B$ である．命題 14 (1) より，正則行列 P が存在して $B = PA$ となる．$r = 0$ とすると，$\operatorname{rank} B = 0$ となる．階数が 0 の階段行列は零行列 O のみなので，$B = O$ である．ゆえに $A = P^{-1}B = P^{-1}O = O$ となる． □

ここで，定理 3.19 (p.75) の証明を与える．

(定理 3.19 の証明).

<u>変形されることの証明</u>

A を $m \times n$ 行列とし，行の数 m についての帰納法で示す．

[$m = 1$ のときに示す]

$A = (0 \ \cdots \ 0)$ ならば，A はすでに階段行列である．$A \neq (0 \ \cdots \ 0)$ ならば，$A = (0 \ \cdots \ 0 \; a * \cdots *)$, $a \neq 0$ となる a がある．A の第 1 行を a^{-1} 倍すると $(0 \ \cdots \ 0 \; 1 \; * \ \cdots \ *)$ となり，階段行列となる．

[$m = k$ のときに成り立つと仮定して，$m = k+1$ のときに示す]

A を $(k+1) \times n$ 行列とする．$A = O$ ならば，A はすでに階段行列である．$A \neq O$ とする．初めて 0 でない成分が現れる A の列の番号を p_1 とし，A の (i_1, p_1) 成分が $a \neq 0$ であるとする．このとき

$$A = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} & \overset{p_1}{\smile} & \end{array} \\ i_1) & \begin{pmatrix} & * & \\ O & a & * \\ & * & \end{pmatrix} \end{array} \quad [i_1 \neq 1 \text{ なら，第 1 行と第 } i_1 \text{ 行を入れ替える}]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{p_1}{\smile} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & a & \\ & * & \\ O & \vdots & * \\ & * & \end{pmatrix} \end{array} \quad [(1, p_1) \text{ 成分を要として第 } p_1 \text{ 列を掃き出す}]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{p_1}{\smile} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 & \\ & 0 & \\ O & \vdots & * \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array} = A'$$

と変形される．

A' の第 1 行を取り除いた行列 A'' を考える．A'' は $k \times n$ 行列であり，$k \times (n - p_1)$ 行列 $\tilde{A}$ を用いて $A'' = (O_{k,p_1} \ \ \tilde{A})$ と表される．$\tilde{A}$ に帰納法の仮定を用いると，$\tilde{A}$ は行基本変形の繰り返しにより階段行列 $\tilde{B}$ に変形されることがわかる．$\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ に変形するときと同じ行基本変形の繰り返しにより，A'' は $B'' = (O_{k,p_1} \ \ \tilde{B})$ に変形される．よって，A' の第 2 行以降に，A'' を B'' に変形するときと同じ行基本変形の繰り返しを行うと，

O_{k,p_1} はサイズが $k \times p_1$ の零行列

$$A' \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \overset{p_1}{\smile} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 & * \ \cdots \ * \\ & 0 & \\ O & \vdots & \tilde{B} \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array} = A'''$$

と変形される．$\tilde{B} = O$ なら，A''' はすでに階段行列である．$\tilde{B} \neq O$ なら，$\tilde{B}$ のピボットを含むような A''' の列の番号を $p_2 < \cdots < p_r$ とする．A''' において，まず $(2, p_2)$ 成分を要として第 p_2 列を掃き出し，次に $(3, p_3)$ 成分を要として第 p_3 列を掃き出し，これを繰り返し，最後に (r, p_r) 成分を要として第 p_r 列を掃き出す．以上により，A''' は階段行列に変形される．

<u>ただ 1 つに定まることの証明</u>

$m \times n$ 行列 A が，行基本変形の繰り返しにより階段行列 B および C に変形されたとする．このとき，$B = C$ となることを示す．

$r = \operatorname{rank} B$, $s = \operatorname{rank} C$ とおく．$r \geq s$ と仮定してよい．命題 14 (1) により，正則行列 P_1, P_2 が存在して $B = P_1 A$, $C = P_2 A$ となる．$P = P_1 P_2^{-1}$ とおくと，P も正則である．さらに

P_1, P_2, P は，m 次正方行列である．

$$B = P_1 A = P_1(P_2^{-1}C) = PC$$

となる．

$s = 0$ なら，補題 15 により $C = O$ であり，$B = PC = PO = O$ となる．よって，$B = C = O$ がわかる．

以下，$s \neq 0$ とする．$B = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)$, $C = (\boldsymbol{c}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{c}_n)$ と列ベクトルを用いて分割表示する．$B = PC$ より，命題 2.70 (1) (p.59) から $(\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n) = (P\boldsymbol{c}_1 \ \cdots \ P\boldsymbol{c}_n)$ となるので，

$$\boldsymbol{b}_1 = P\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{b}_2 = P\boldsymbol{c}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n = P\boldsymbol{c}_n \tag{1.1}$$

がわかる．さらにこのとき，

$$\boldsymbol{c}_1 = P^{-1}\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{c}_2 = P^{-1}\boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}_n = P^{-1}\boldsymbol{b}_n \tag{1.2}$$

でもある．B, C のピボットを含む列の番号をそれぞれ $p_1 < \cdots < p_r$ および $q_1 < \cdots < q_s$ とおくと，B, C は

$$B = \begin{array}{c} \\ 1) \\ 2) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & \overset{p_1}{\smile} & & & & \overset{p_2}{\smile} & & \cdots & & \overset{p_r}{\smile} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \\ 1) \\ 2) \\ \vdots \\ s) \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & \overset{q_1}{\smile} & & & & \overset{q_2}{\smile} & & \cdots & & \overset{q_s}{\smile} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

の形である．

まず，$\boldsymbol{c}_1 = \cdots = \boldsymbol{c}_{q_1 - 1} = \boldsymbol{0}$ と (1.1) より，$\boldsymbol{b}_1 = \cdots = \boldsymbol{b}_{q_1 - 1} = \boldsymbol{0}$ を得る．ここで $\boldsymbol{b}_{p_1} \neq \boldsymbol{0}$ より，$q_1 - 1 < p_1$ となる．よって，$q_1 \leq p_1$ がわかる．また，$\boldsymbol{b}_1 = \cdots = \boldsymbol{b}_{p_1 - 1} = \boldsymbol{0}$ と (1.2) より，$\boldsymbol{c}_1 = \cdots = \boldsymbol{c}_{p_1 - 1} = \boldsymbol{0}$ を得る．$\boldsymbol{c}_{q_1} \neq \boldsymbol{0}$ より $p_1 - 1 < q_1$ であり，$p_1 \leq q_1$ がわかる．よって，$p_1 = q_1$ となる．このとき，$P\boldsymbol{e}_1 = P\boldsymbol{c}_{q_1} = \boldsymbol{b}_{q_1} = \boldsymbol{b}_{p_1} = \boldsymbol{e}_1$ である．よって，

$$P = PI_m = P\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P\boldsymbol{e}_1 & \cdots & P\boldsymbol{e}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

がわかる．$P^{-1}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$

$1 \leq i \leq m$ に対して，

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．

より，同様に $P^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & P^{-1}\boldsymbol{e}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & * \\ 0 & & \end{pmatrix}$ がわかる．

次に，$1 \leq j \leq q_2 - 1$ に対して，$\boldsymbol{b}_j = P\boldsymbol{c}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & * \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．$\boldsymbol{b}_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ より $q_2 - 1 < p_2$ であり，$q_2 \leq p_2$ がわかる．また，$1 \leq j \leq p_2 - 1$ に対して，$\boldsymbol{c}_j = P^{-1}\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & * \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．$\boldsymbol{c}_{q_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ より $p_2 - 1 < q_2$ であり，$p_2 \leq q_2$ がわかる．よって，$p_2 = q_2$ となる．このとき，$P\boldsymbol{e}_2 = P\boldsymbol{c}_{q_2} = \boldsymbol{b}_{q_2} = \boldsymbol{b}_{p_2} = \boldsymbol{e}_2$ である．よって，$P = \begin{pmatrix} P\boldsymbol{e}_1 & P\boldsymbol{e}_2 & \cdots & P\boldsymbol{e}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$ がわかる．$P^{-1}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$ より，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$ もわかる．

この議論を繰り返すと，$r \geq s$ に注意して，順次

$$p_3 = q_3,\ P\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3,\ P = \begin{pmatrix} I_3 & * \\ O & * \end{pmatrix},\ P^{-1}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3,\ P^{-1} = \begin{pmatrix} I_3 & * \\ O & * \end{pmatrix},$$

$$\cdots,$$

$$p_s = q_s,\ P\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{e}_s,\ P = \begin{pmatrix} I_s & * \\ O & * \end{pmatrix},\ P^{-1}\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{e}_s,\ P^{-1} = \begin{pmatrix} I_s & * \\ O & * \end{pmatrix}$$

がわかる．

$C = (c_{ij})$ とすると，$\operatorname{rank} C = s$ より $\boldsymbol{c}_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{sj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ なので

$$P\boldsymbol{c}_j = \begin{pmatrix} I_s & * \\ O & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{sj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{sj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}_j \quad (1 \le j \le n)$$

となる．よって (1.1) から $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{c}_j \quad (1 \le j \le n)$ となり，$B = C$ が成り立つ． □

次に，定理 3.49 (p.89) を一般化した形で述べる．

定理 16. n 次正方行列 A に対し，以下の 4 条件は同値である．

(1) A は正則である．
(2) $\operatorname{rank} A \ge n$ が成り立つ．
(3) $\operatorname{rank} A = n$ が成り立つ．
(4) A は何回かの行基本変形により，単位行列 I_n に変形される．

(4) は,「A の階段行列は単位行列 I_n である」とも言い換えられる．

(証明). (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1) の順に示せばよい．
まず (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す．A は正則とする．$\operatorname{rank} A < n$ と仮定する．A が何回かの行基本変形により階段行列 B に変形されたとすると，$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A < n$ より，B の第 n 行の成分は全て 0 である．このとき，命題 3.42 (p.87) により A は正則でないことになる．これは矛盾である．よって，$\operatorname{rank} A \ge n$ が成り立つ．
次に (2) $\Longrightarrow$ (3) を示す．命題 3.24 (p.76) より，$\operatorname{rank} A \le n$ である．よって，$\operatorname{rank} A \ge n$ ならば $\operatorname{rank} A = n$ である．
次に (3) $\Longrightarrow$ (4) を示す．$\operatorname{rank} A = n$ とする．A が何回かの行基本変形により階段行列 B に変形されたとすると，$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A = n$ である．B の行および列の数は共に n，ピボットの数も n より，B の各行，各列はピボットを含む．これは B の対角成分がすべてピボットであることを意味する．よって $B = I_n$ である．
最後に (4) $\Longrightarrow$ (1) を示す．A が何回かの行基本変形により I_n に変形されたとすると，命題 14 (1) により，ある正則行列 P に対して $PA = I_n$ となる．この式の両辺に左から P^{-1} を掛けると，$A = P^{-1}$ となる．P^{-1} は正則より，A も正則である． □

次の定理で述べるように，任意の正則行列は，いくつかの基本行列の積として表される．

定理 17. A を n 次正則行列とすると，(整数 $s \ge 1$ と) n 次の基本行列 $P_1, \cdots, P_s$ が存在して，$A = P_s \cdots P_1$ となる．

(証明). A を n 次正則行列とすると，定理 16 により A は何回かの行基本変形により I_n に変形される．定理 4 (1) より，ある基本行列 $Q_1, \ldots, Q_s$ が存在して $Q_1 \cdots Q_s A = I_n$ となる．この式の両辺に左から $Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ を掛ければ，$A = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ となる．$i = 1, \cdots, s$ に対して $P_i = Q_i^{-1}$ とおけば，定理 9 より P_i も基本行列であることがわかる．さらに，このとき $A = P_s \cdots P_1$ となる． □

次の命題で述べるように，命題 14 の逆も成り立つ．

命題 18. (1) A を行列，P を正則行列とし，積 PA が定義可能 (すなわち P の列の数と A の行の数が等しい) とすると，A は何回かの行基本変形により PA に変形することができる．

(2) A を行列，P を正則行列とし，積 AP が定義可能 (すなわち A の列の数と P の行の数が等しい) とすると，A は何回かの列基本変形により AP に変形することができる．

(3) A を行列，P と Q を正則行列とし，積 PAQ が定義可能 (すなわち P の列の数と A の行の数が等しく，A の列の数と Q の行の数も等しい) とすると，A は何回かの行および列基本変形により PAQ に変形することができる．

(証明). (1) 定理 17 により，基本行列 $P_1, \cdots, P_s$ を用いて $P = P_s \cdots P_1$ と表される．このとき $PA = P_s \cdots P_1 A$ となり，定理 4 (1) により A は s 回の行基本変形を用いて PA に変形されることがわかる．

(2)，(3) は (1) と同様である．各自試みよ． □

命題 14 と 18 により，行列 A に行 [列] 基本変形を何回か施すことは，A に左 [右] からある正則行列を掛けることと同等であるといえる．次の系で述べるように，行列に左から正則行列を掛けても階数は変わらない．

系 19. A を $m \times n$ 行列，P を m 次正則行列とすると，$\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ．

(証明). 命題 18 (1) により，A は何回かの行基本変形により PA に変形される．階数は行基本変形で変わらない (命題 3.25 (p.76)) ので，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(PA)$ が成り立つ． □

• 命題 2.67 の証明

ここで，命題 2.67 (p.58) の証明を与える．

(命題 2.67 の証明).

(1) n 次正方行列 A に対し，$AX = I_n$ となる n 次正方行列 X があるとする．このとき，A は正則であり，さらに $X = A^{-1}$ であることを示す．

定理 3.19 (p.75) により，A は行基本変形を用いて階段行列 B に変形される．このとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ である．命題 14 (1) より，正則行列 P が存在して $B = PA$ となる．$PA = B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ と行ベクトルを用いて分割表示する．$\operatorname{rank} A < n$ と仮定する

と，$\mathrm{rank}\,B = \mathrm{rank}\,A < n$ であり，B は階段行列だから $\boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}$ となる．$AX = I_n$ より $PAX = P$ なので，$BX = P$ である．よって，命題 2.70 (2) (p.59) により，$P = BX = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{0}X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ である．ところが，補題 2.72 (p.60) から P は正則でないことになる．これは矛盾である．よって $\mathrm{rank}\,A \geq n$ であり，定理 16 により A は正則である．すなわち逆行列 A^{-1} が存在する．$AX = I_n$ の両辺に左から A^{-1} を掛ければ，$X = A^{-1}$ が成り立つ．

(2) n 次正方行列 A に対し，$XA = I_n$ となる n 次正方行列 X があるとする．このとき，A は正則であり，さらに $X = A^{-1}$ であることを示す．

等式 $XA = I_n$ の両辺の転置行列をとると，${}^tA\,{}^tX = I_n$ を得る．すでに (1) で示したことから，${}^tA$ は正則で，その逆行列は $({}^tA)^{-1} = {}^tX$ である．よって，${}^tX\,{}^tA = I_n$ も成り立つ．この両辺の転置をとって，$AX = I_n$ を得る．$AX = XA = I_n$ より，A は正則であり，X は A の逆行列である．ゆえに $X = A^{-1}$ が成り立つ． □

Web「行列の転置」の命題 2 (2)，(3) より，次が成り立つ．
$$ {}^t(XA) = {}^tA\,{}^tX, $$
$$ {}^t({}^tX\,{}^tA) = {}^t({}^tA)\,{}^t({}^tX) = AX. $$

● 行および列基本変形による階数の理解

定理 20. A を任意の行列とし，$r = \mathrm{rank}\,A$ とおく．

(1) A は，行および列基本変形を何回か施して
$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
に変形することができる．

(2) A が行および列基本変形を何回か施すことにより
$$\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
に変形されたとする．このとき，$s = r$ が成り立つ．

$\left(\begin{smallmatrix} I_r & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ と書いたら，$\left(\begin{smallmatrix} I_r & O \end{smallmatrix}\right)$ や $\left(\begin{smallmatrix} I_r \\ O \end{smallmatrix}\right)$ や I_r の場合も含むことにする．$r = 0$ のとき (すなわち $A = O$ のとき) は，$\left(\begin{smallmatrix} I_r & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right) = O$ と考えることにする．

(証明). (1) $A = O$ ならば，$r = 0$ である．このときの定理の主張は,「O は，行および列基本変形を何回か施して O に変形することができる」ということである．これは確かに成り立つ．

以下，$A \neq O$ とする．補題 15 より，$r > 0$ である．定理 3.19 (p.75) により，A は階段行列

$$
B = \begin{array}{c} \\ 1) \\ 2) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & \underbrace{p_1}_{} & & & & \underbrace{p_2}_{} & & \cdots & & \underbrace{p_r}_{} & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

に変形される．この B について，まず $(1,p_1)$ 成分を要として第 p_1 行を掃き出し，次に $(2,p_2)$ 成分を要として第 p_2 行を掃き出し，これを繰り返し，最後に (r,p_r) 成分を要として第 p_r 行を掃き出す．すると B は

$$
B' = \begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & p_1 & & & & p_2 & & \cdots & & p_r & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} 1) \\ 2) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

に変形される．さらに，$p_1 \neq 1$ なら第 1 列と第 p_1 列の入れ替え，$p_2 \neq 2$ なら第 2 列と第 p_2 列の入れ替え，$\cdots$，$p_r \neq r$ なら第 r 列と第 p_r 列の入れ替えを順次行うと，B' は $\left(\begin{smallmatrix} I_r & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ に変形される．

(2) 行および列基本変形の繰り返しで，A が $\left(\begin{smallmatrix} I_s & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ に変形されたとする．さらに，行および列基本変形の繰り返しで，A が $\left(\begin{smallmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ にも変形されたとする．このとき，$s = s'$ であることを示す．

$s \geq s'$ と仮定してよい．命題 14 (3) により正則行列 P, Q, P', Q' が存在して，

$$
PAQ = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{1.3}
$$

および

$$
P'AQ' = \begin{pmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{1.4}
$$

となる．

$s' = 0$ なら，(1.4) は $P'AQ' = O$ ということである．このとき，$A = (P')^{-1}O(Q')^{-1} = O$ となる．(1.3) より

$$
\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = PAQ = POQ = O
$$

であるが，これは $s = 0$ ということである．ゆえに $s = s' = 0$ が成り立つ．

以下，$s' \neq 0$ とする．(1.3) より $A = P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} I_s & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)Q^{-1}$ であり，これを (1.4) に代入して

$$
P'P^{-1}\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}Q' = \begin{pmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{pmatrix}
$$

となる．ゆえに

$$
P'P^{-1}\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{pmatrix}(Q')^{-1}Q \tag{1.5}
$$

を得る．ここで (1.5) の左辺において，$P'P^{-1}$ は正則なので，系 19 により

$$\operatorname{rank}\left(P'P^{-1}\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} = s$$

である．一方，(1.5) の右辺において，$\left(\begin{smallmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ の第 $(s'+1)$ 行から最後の行までの各行の成分はすべて 0 なので，行列の積の定義から $\left(\begin{smallmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)(Q')^{-1}Q$ の $(s'+1)$ 行以降の成分もすべて 0 であることがわかる．よって

$$\begin{pmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{pmatrix}(Q')^{-1}Q = \begin{array}{l} s' \text{ 行 } \{ \\ \end{array}\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}$$

と表される．C の階段行列を B とすると，$\left(\begin{smallmatrix} C \\ O \end{smallmatrix}\right)$ の階段行列は $\left(\begin{smallmatrix} B \\ O \end{smallmatrix}\right)$ なので，

$$\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{pmatrix}(Q')^{-1}Q\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} = \operatorname{rank} B$$

である．B の行の数は s' なので，命題 3.24 (p.76) により $\operatorname{rank} B \leq s'$ となる．したがって

$$\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{pmatrix}(Q')^{-1}Q\right) \leq s'$$

が成り立つ．(1.5) から

$$\operatorname{rank}\left(P'P^{-1}\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} I_{s'} & O \\ O & O \end{pmatrix}(Q')^{-1}Q\right)$$

なので，$s \leq s'$ となる．$s \geq s'$ と仮定していたので，$s = s'$ が示された．

行および列基本変形の繰り返しで A が $\left(\begin{smallmatrix} I_s & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ に変形されたとする．(1) により A は $\left(\begin{smallmatrix} I_r & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ にも変形されるので，上で示したことにより $s = r$ が成り立つ． □

注意 21. 行および列基本変形の繰り返しにより A が $\left(\begin{smallmatrix} I_r & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ に変形されることをもって，$\operatorname{rank} A$ を r と定義する流儀もある．

系 22. A を任意の行列とし，$r = \operatorname{rank} A$ とおく．

(1) ある正則行列 P, Q が存在して，

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる．

(2) 正則行列 P, Q に対して，

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となったとする．このとき，$s = r$ が成り立つ．

(証明). (1) 命題 14 (3) および定理 20 (1) より従う．

(2) 命題 18 (3) および定理 20 (2) より従う． □

次の命題で述べるように，行列とその転置行列の階数は等しい．

定理 23. 任意の行列 A に対して，$\operatorname{rank}({}^tA) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ．

(証明)． $r = \operatorname{rank} A$ とおく．系 22 (1) より，ある正則行列 P, Q が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

となる．(1.6) の転置をとると，

$${}^tQ{}^tA{}^tP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる．Web「行列の転置」の命題 2 (4) により，${}^tQ$ と ${}^tP$ は正則である．よって系 22 (2) から $r = \operatorname{rank}({}^tA)$ を得る．ゆえに $\operatorname{rank}({}^tA) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ． □

Web「行列の転置」の命題 2 (3) より，次が成り立つ．
$${}^t(PAQ) = {}^t(AQ)\,{}^tP = {}^tQ\,{}^tA\,{}^tP.$$

次の定理で述べるように，行列に左右から正則行列を掛けても階数は変わらない．

定理 24. A を $m \times n$ 行列，P を m 次正則行列，Q を n 次正則行列とすると，$\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ．

(証明)． 系 19 より $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank}(AQ)$ である．さらに，定理 23 より $\operatorname{rank}(AQ) = \operatorname{rank}({}^tQ{}^tA)$ である．Web「行列の転置」の命題 2 (4) より ${}^tQ$ は正則なので，再び系 19 により $\operatorname{rank}({}^tQ{}^tA) = \operatorname{rank}({}^tA)$ を得る．定理 23 により $\operatorname{rank}({}^tA) = \operatorname{rank} A$ である．ゆえに $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ． □

● 問の略解

問 7 (p.4) $AP_3(1;2) = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $AP_3(2,3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}$, $AP_3(1,3;-5) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3-5a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3-5b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3-5c_1 \end{pmatrix}$

問 8 (p.4) $P_2(2;-7)A = \begin{pmatrix} x & y \\ -7z & -7w \end{pmatrix}$, $P_2(2,1)A = \begin{pmatrix} z & w \\ x & y \end{pmatrix}$, $P_2(2,1;6)A = \begin{pmatrix} x & y \\ z+6x & w+6y \end{pmatrix}$, $AP_2(2;-7) = \begin{pmatrix} x & -7y \\ z & -7w \end{pmatrix}$, $AP_2(2,1) = \begin{pmatrix} y & x \\ w & z \end{pmatrix}$, $AP_2(2,1;6) = \begin{pmatrix} x+6y & y \\ z+6w & w \end{pmatrix}$