広義の階段行列

行列の階数を求めるには，実は，行列を必ずしも階段行列にまで変形する必要はない．行基本変形により，以下に述べる広義の階段行列に変形すれば十分である．

定義 1. **広義の階段行列**とは，以下のような行列 B' のことである．
ある整数 $r \geq 1$ があって，次の条件を満たす．

(1) B' の第 $(r+1)$ 行から最後の行までの各行において，すべての成分が 0.
(2) B' の第 1 行から第 r 行には，それぞれ 0 でない成分がある．
(3) 各整数 i $(1 \leq i \leq r)$ に対し，B' の第 i 行の 0 でない最初の成分の列の番号を p_i とすると，$p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ が成り立つ．

広義の階段行列 B' は以下のような形である．

$$B' = \begin{array}{r} \\ 1) \\ 2) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & \underset{\smile}{p_1} & & \underset{\smile}{p_2} & \cdots\cdots & \underset{\smile}{p_r} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0\cdots0 & a_1 & *\cdots* & * & *\cdots\cdots* & * & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & a_2 & *\cdots\cdots* & * & *\cdots* \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots\cdots0 & a_r & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1.1}$$

ただし $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \cdots,\ a_r \neq 0$ である．
なお，零行列 O も広義の階段行列であると定める．
広義の階段行列に対して，定義 3.14 (p.72) の階段行列のことを，**狭義の階段行列**とよぶこともある．

注意 2. 狭義の階段行列は，広義の階段行列でもある．

例 3. (1) 例 3.16 (p.73) の行列 $B_1, \ldots, B_7$ は，狭義の階段行列である．したがって広義の階段行列でもある．
(2) 以下の行列は狭義の階段行列ではないが，広義の階段行列である．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(3) 以下の行列は広義の階段行列ではない．したがって狭義の階段行列でもない．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 4. 任意の行列 A は，有限回の行基本変形により広義の階段行列に変形される．

(証明). 狭義の階段行列は広義の階段行列なので，定理 3.19 (p.75) より従う． $\square$

例 5. 行基本変形を用いて，行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を広義の階段行列に変形してみよう．

(手順 1)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-\frac{3}{2}) \\ + \end{array} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(手順 2)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-1) \\ + \end{array} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-2) \\ + \end{array} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

注意 6. 上の例からもわかるように，1 つの行列に行基本変形を繰り返すことで得られる広義の階段行列は，ただ 1 つとは限らない．
(注: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の狭義の階段行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．)

定理 7. 広義の階段行列 B' の階数は，$\mathbf{0}$ でない行ベクトルの数に等しい．すなわち，B' が (1.1) の形ならば $\operatorname{rank} B' = r$ が成り立ち，$B' = O$ ならば $\operatorname{rank} B' = 0$ が成り立つ．

(証明). 広義の階段行列 B' は (1.1) の形であるとする．まず $(1, p_1)$ 成分を要として第 p_1 列を掃き出し，次に $(2, p_2)$ 成分を要として第 p_2 列を掃き出し，これを繰り返し，最後に (r, p_r) 成分を要として第 p_r 列を掃き出す．すると B' は p.73 の (3.14) の形の階段行列に変形され，その階数は r である． $\square$

行列の掃き出しについては，Web「基本行列と行列の基本変形」の定義 11 を参照せよ．

例題 8. 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & -1 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ を行基本変形を用いて広義の階段行列に変形し，階数を求めよ．

(解答).

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & -1 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \times 3 \quad \times 2 \quad \times 3 \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & 3 & -1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \mid \times \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \times(-6) \quad \times(-9) \\ + \\ + \end{array} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \times(-\frac{4}{3}) \\ + \end{array} \\
\longrightarrow &\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より，$\operatorname{rank} A = 3$.

(注: A の狭義の階段行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．) □

問 9. 次の行列の階数を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & 3 \\ -12 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

● 問の略解

問 9 (p.3) $\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} B = 3$