

連立 1 次方程式に随伴した同次方程式

連立 1 次方程式が解をもつとき、その解が任意定数を用いて表されることがしばしばあるわけだが、そのような任意定数を用いて表された解は一般解とよばれることがある。それに対して、解に現れる任意定数を特定の値にした解は特殊解とよばれる。

連立 1 次方程式

$$Ax = b \quad (1.1)$$

が与えられたとき、右辺の b を 0 に置き換えた連立 1 次方程式

$$Ax = 0$$

を (1.1) に随伴した同次方程式とよぶ。

連立 1 次方程式 $Ax = b$ とそれに随伴した同次方程式 $Ax = 0$ は、それぞれの解の集合に関して密接な関連をもつ。

今、 $x = x_0$ を $Ax = b$ の特殊解（の 1 つ）とし、 $x = x_h$ を $Ax = 0$ の一般解とする。このとき、それらの和 $x = x_0 + x_h$ は方程式 $Ax = b$ を満たす。なぜなら、

$$A(x_0 + x_h) = Ax_0 + Ax_h = b + 0 = b.$$

一方、 $x = x_0$, $x = x_g$ がそれぞれ $Ax = b$ の特殊解（の 1 つ）、一般解であるとき、それらの差 $x = x_g - x_0$ は方程式 $Ax = 0$ を満たす。なぜなら

$$A(x_g - x_0) = Ax_g - Ax_0 = b - b = 0.$$

このとき、 $x_g = x_0 + x$ である。

以上の考察から「連立 1 次方程式の一般解を見つけることは、その特殊解および随伴する同次方程式の一般解を見つけることと同等」といえる。さらに、

$$(Ax = b \text{ の一般解}) = (Ax = b \text{ の特殊解}) + (Ax = 0 \text{ の一般解})$$

が成り立つといえる。

例 1. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases} \quad (1.2)$$

を解いてみよう。

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -10 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \xrightarrow{\times(-3)} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
\longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \xrightarrow{\times(-1)} \xrightarrow{\times 1} \\ \leftarrow + \end{array} \\
\longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より, (1.2) は

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

と同値である. $x_3 = c$ (c は任意定数) において, (1.2) の一般解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2c \\ x_2 = -4 - 3c \\ x_3 = c \end{cases}, \text{ もしくは } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る. ここで, たとえば $c = 0$ とおくと, (1.2) の特殊解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る.

次に, (1.2) に随伴した同次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

を考えよう.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \xrightarrow{\times(-3)} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
\longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \xrightarrow{\times(-1)} \xrightarrow{\times 1} \\ \leftarrow + \end{array} \\
\longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より, (1.3) は

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

と同値である. $x_3 = c$ (c は任意定数) において, (1.3) の一般解

$$\begin{cases} x_1 = 2c \\ x_2 = -3c \\ x_3 = c \end{cases}, \text{ もしくは } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る.

よって, 確かに

$$((1.2) \text{ の一般解}) = ((1.2) \text{ の特殊解}) + ((1.3) \text{ の一般解})$$

が成り立っている.