行列式の展開（任意次数の場合）

4 章 4.4 節で述べた行列式の展開公式を，任意次数の場合に証明する．

補題 1． $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列，$\tilde{a}_{ij}$ を A の (i,j) 余因子とする．このとき

$$|A| = a_{n1}\tilde{a}_{n1} + a_{n2}\tilde{a}_{n2} + \cdots + a_{nn}\tilde{a}_{nn}$$

が成り立つ．

(証明)．定理 4.33，列に関する行列式の性質，および補題 4.57 により

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1i} & & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ a_{n-1\,1} & \cdots & & a_{n-1\,i} & & \cdots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ & \cdots & & \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} & a_{n-1\,1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} \end{vmatrix} + \cdots \\
&\qquad + (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1i} \\ & \cdots & & \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n} & a_{n-1\,i} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ & \cdots & & \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} a_{n1}|A_{n1}| + \cdots + (-1)^{n-i} a_{ni}|A_{ni}| + \cdots + a_{nn}|A_{nn}|
\end{aligned}
$$

となる．ここで $(-1)^{n-i} = (-1)^{n+i}$ に注意して結論を得る． □

定理 2 (第 i 行に関する余因子展開)**.** $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列，$\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子とする．このとき任意の i について

定理 4.59 と同じ

$$
|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} \tag{1.1}
$$

が成り立つ．

(証明). 定理 4.37 を $(n - i)$ 回適用し，

$$
|A| = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ (i \\ \\ \\ (n \end{matrix}
$$

であり，ここで補題 1 を用いると

$$
\begin{aligned}
|A| = (-1)^{n-i}\{&(-1)^{n+1} a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{n+2} a_{i2}|A_{i2}| \\
&+ \cdots + (-1)^{n+j} a_{ij}|A_{ij}| + \cdots + (-1)^{n+n} a_{in}|A_{in}|\}
\end{aligned}
$$

となる．ここで $(-1)^{n-i}(-1)^{n+j} = (-1)^{i+j}$ から結論を得る． □

列に関する展開も，同様の手順で証明することができる．各自試みよ．

最後に補題 4.66 を任意次数の場合に証明する．

補題 3. $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列，$\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子とする．このとき任意の i, j に対して

$$
a_{i1}\tilde{a}_{j1} + a_{i2}\tilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{jn} = \begin{cases} |A| & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{1.2}
$$

が成り立つ．同様に任意の k, l に対して

$$a_{1k}\tilde{a}_{1l} + a_{2k}\tilde{a}_{2l} + \cdots + a_{nk}\tilde{a}_{nl} = \begin{cases} |A| & k = l \text{ のとき} \\ 0 & k \neq l \text{ のとき} \end{cases} \tag{1.3}$$

が成り立つ．

(証明). 定理 2 より (1.2) の $i = j$ の場合は既に証明されている．$i \neq j$ の場合は，第 j 行に関する展開の公式と系 4.39 により

$$a_{i1}\tilde{a}_{j1} + a_{i2}\tilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = \begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

となり示された．列に関する展開の公式を用いることにより，(1.3) についても同様に証明できる． □