行列式の性質 I（任意次数の場合）

ここでは，4 章 4.3 節で述べた，行および列に関する行列式の性質を，任意次数の行列式に対して証明する．

定理 1. 等式 　　　　　　定理 4.33 と同じ

$$
i)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
= i)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i
$$

が成り立つ．

(証明).

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum (\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\qquad + \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}) \\
&= \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\qquad + \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

□

定理 2. 等式 　　　　　　定理 4.35 と同じ

$$
i)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i
$$

が成り立つ．

(証明).

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (\lambda a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \lambda \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 3. 等式 　　定理 4.37 と同じ

$$
\begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ (i \\ \\ (j \\ \\ \\ \end{array}
\tag{1.1}
$$

が成り立つ.

(証明). n 次順列 σ を一つ固定する．さらに σ の i 番目の数と j 番目の数を入れ替える互換を行って得られる n 次順列を τ とする．すなわち

$$\tau = (\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \cdots \quad \sigma(j) \quad \cdots \quad \sigma(i) \quad \cdots \quad \sigma(n))$$

である．このとき補題 4.19 から $\mathrm{sgn}(\sigma) = -\mathrm{sgn}(\tau)$ が成り立ち，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} && (1.2)\\
&\qquad = \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\qquad = -\mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{n\tau(n)} && (1.3)
\end{aligned}
$$

となる．ここですべての n 次順列 σ に対して，(1.2) の和をとると，すべての n 次順列 τ に対して (1.3) の和をとることになる．従って (1.1) が示された． $\square$

系 4. 等式 　　系 4.39 と同じ

$$
\begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= 0
$$

が成り立つ.

(証明). 第 i 行と第 j 行を取り替えると，定理 1.1 から

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

となるから，

$$2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

が得られる．従って結論を得る． □

定理 5. 等式 定理 4.42 と同じ

$$\begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i \\ \\ (j \\ \\ \\ \end{array}$$

が成り立つ．

(証明).

$$(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (右辺)
$$

□

4 章で述べたように，列に関しても同様の公式が成り立つ．定理として述べておくが，証明は概略にとどめる．各自で細部を検討してほしい．

後に述べる転置行列と行列式に関する定理を用いて証明することもできる．

定理 6. 等式

$$
\begin{array}{c} \overset{k}{\smile} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k}+b_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2k}+b_{2k} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{nk}+b_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c} \overset{k}{\smile} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2k} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \overset{k}{\smile} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & b_{2k} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}
$$

が成り立つ．

(証明). n 次順列 σ を一つとる．このとき $\sigma(i) = k$ を満たす整数 i（$1 \leq i \leq n$）が唯一つ存在する．従って

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a_{ik} + b_{ik}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\quad = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{ik} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\qquad\quad + \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{ik} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\quad = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\qquad\quad + \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}
\end{aligned}
$$

となる．すべての n 次順列 σ に関して両辺の和をとることで結論を得る． □

定理 7. 等式

$$
\begin{array}{c} \overset{k}{\smile} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{2k} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \lambda a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = \lambda \begin{array}{c} \overset{k}{\smile} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2k} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}
$$

が成り立つ.

(証明). n 次順列 σ を一つとり，i を $\sigma(i)=k$ となる整数とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots(\lambda a_{ik})\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&\qquad=\lambda\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}
\end{aligned}
$$

となる．すべての n 次順列 σ に関して両辺の和をとることで結論を得る． $\square$

定理 8. 等式

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \underset{\smile}{k} & & \underset{\smile}{l} & & \phantom{a_{1n}} \end{array}\\
\begin{vmatrix}
a_{11} & & a_{1l} & & a_{1k} & & a_{1n}\\
a_{21} & & a_{2l} & & a_{2k} & & a_{2n}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & & a_{nl} & & a_{nk} & & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
=-\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \underset{\smile}{k} & & \underset{\smile}{l} & & \phantom{a_{1n}} \end{array}\\
\begin{vmatrix}
a_{11} & & a_{1k} & & a_{1l} & & a_{1n}\\
a_{21} & & a_{2k} & & a_{2l} & & a_{2n}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & & a_{nk} & & a_{nl} & & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

が成り立つ.

(証明). n 次順列 σ を一つとり，i,j を $\sigma(i)=k,\ \sigma(j)=l$ となる整数とする．さらに σ に i 番目と j 番目を入れ替える互換を行った順列を τ とすると $\tau(i)=l,\ \tau(j)=k$ が成り立つ．このとき

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{il}\cdots a_{jk}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&\qquad=-\operatorname{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{i\tau(i)}\cdots a_{j\tau(j)}\cdots a_{n\tau(n)}
\end{aligned}
$$

となる．すべての n 次順列 σ に関して両辺の和をとることで結論を得る． $\square$

定理 9. 等式

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \underset{\smile}{k} & & \underset{\smile}{l} & & \phantom{a_{1n}} \end{array}\\
\begin{vmatrix}
a_{11} & & a_{1k} & & a_{1k} & & a_{1n}\\
a_{21} & & a_{2k} & & a_{2k} & & a_{2n}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & & a_{nk} & & a_{nk} & & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
=0
$$

が成り立つ.

(証明). 定理 4 の証明と同様. $\square$

定理 10. 等式

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & k & l & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
\begin{vmatrix}
a_{11} & & a_{1k}+\lambda a_{1l} & & a_{1l} & & a_{1n} \\
a_{21} & & a_{2k}+\lambda a_{2l} & & a_{2l} & & a_{2n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & & a_{nk}+\lambda a_{nl} & & a_{nl} & & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & k & l & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
\begin{vmatrix}
a_{11} & & a_{1k} & & a_{1l} & & a_{1n} \\
a_{21} & & a_{2k} & & a_{2l} & & a_{2n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & & a_{nk} & & a_{nl} & & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

が成り立つ.

(証明). 定理 5 の証明と同様. □