

行列式の性質 II（任意次数の場合）

ここでは、任意次数の行列式に対して定理 4.78 および定理 4.80 を証明する。4 章 4.7 節では、これらの定理について、それぞれ、2 次正方行列の場合、3 次正方行列の場合の証明を与えた。しかし、同様の方針を任意次数の行列式に対して実行することはかなり複雑である。ここでは、方針を変更し、Web「基本行列と行列の基本変形」で扱われた基本行列の性質を用いて証明する。

どの程度複雑なのか、各自で証明を試みてもらいたい。

まず、基本行列（Web「基本行列と行列の基本変形」定義 2）の行列式を確認しておく。

補題 1 (基本行列の行列式). n 次基本行列 $P_n(i; c), P_n(i, j), P_n(i, j; c)$ について

$$|P_n(i; c)| = \begin{vmatrix} & & \overset{i}{\underbrace{\hspace{1cm}}} & \\ & 1 & & \\ & \ddots & \vdots & \\ i) & \cdots & 1 & \\ & & c & \\ & & & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = c \quad (1.1)$$

等式 (1.1) は $c = 0$ の場合も成り立つ。しかし、基本行列とよばれるのは $c \neq 0$ の場合である。

$$|P_n(i, j)| = \begin{vmatrix} & & \overset{i}{\underbrace{\hspace{1cm}}} & & \overset{j}{\underbrace{\hspace{1cm}}} \\ & 1 & & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ i) & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ j) & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (1.2)$$

$$|P_n(i, j; c)| = \begin{vmatrix} & & \overset{j}{\underbrace{\hspace{1cm}}} \\ & 1 & \\ & \ddots & \vdots \\ i) & \cdots & 1 & \cdots & c \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (1.3)$$

が成り立つ.

(証明). 等式 (1.1) および (1.3) は上三角行列 ((1.3) においては, i, j の大小関係により下三角行列の場合もある) の行列式に関する公式 (例題 4.28 および問 4.30) から直ちにわかる. (1.2) は第 i 行と第 j 行を入れ替え, 定理 4.37 および単位行列の行列式が 1 であることからわかる. $\square$

系 2. 基本行列の行列式は 0 ではない.

Web「基本行列と行列の基本変形」定理 4 で述べたように, 基本行列を左から掛けることが行基本変形, 右から掛けることが列基本変形に他ならなかった. この事実を用いて, 次の補題を示そう.

この事実は基本行列が正則行列であることからわかる. Web「基本行列と行列の基本変形」定理 9 参照.

補題 3. A を n 次正方行列, P を n 次基本行列とする. このとき

$$|PA| = |P||A|, \quad |AP| = |A||P|$$

が成り立つ.

(証明). 三種類の基本行列それぞれの場合について個別に確かめる.

$P = P_n(i; c)$ の場合. Web「基本行列と行列の基本変形」定理 4(a) から, $P_n(i; c)A$ は A の第 i 行を c 倍した行列であるから, 定理 4.35 より

$$|P_n(i; c)A| = c|A|$$

が成り立つ. 一方, $|P_n(i; c)| = c$ であるから

$$|P_n(i; c)A| = |P_n(i; c)||A|$$

がわかる.

$P = P_n(i, j)$ の場合. Web「基本行列と行列の基本変形」定理 4(b) から, $P_n(i, j)A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である. 従って, 定理 4.37 から

$$|P_n(i, j)A| = -|A|$$

である. 一方, $|P_n(i, j)| = -1$ であるから

$$|P_n(i, j)A| = |P_n(i, j)||A|$$

がわかる.

$P = P_n(i, j; c)$ の場合. Web「基本行列と行列の基本変形」定理 4(c) から, $P_n(i, j; c)A$ は A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えた行列である. 従って, 定理 4.42 から

$$|P_n(i, j; c)A| = |A|$$

が成り立つ. 一方, $|P_n(i, j; c)| = 1$ であるから

$$|P_n(i, j; c)A| = |P_n(i, j; c)||A|$$

がわかる.

以上により, すべての場合について

$$|PA| = |P||A|$$

が示された.

同様に, 列基本変形と列に関する行列式の性質を用いることにより

$$|AP| = |A||P|$$

も示すことができる. □

次の定理は, 行列の積と行列式の関係を示す重要な定理である.

定理 4. 同じサイズの正方行列 A, B に対して

定理 4.78 と同じ

$$|AB| = |A||B| \quad (1.4)$$

が成立する.

(証明). 二つの場合に分けて証明する.

Case 1: A が正則行列である場合.

Web「基本行列と行列の基本変形」定理 17 により基本行列 $P_1, P_2, \dots, P_{s-1}, P_s$ を

$$A = P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1$$

を満たすようにとることができる. このとき, 補題 3 を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned} |AB| &= |P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 B| = |P_s| |P_{s-1} \cdots P_2 P_1 B| \\ &= \cdots \\ &= |P_s| \cdots |P_2| |P_1 B| \\ |A| &= |P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1| \\ &= |P_s| |P_{s-1} \cdots P_2 P_1| \\ &= \cdots \\ &= |P_s| \cdots |P_2| |P_1| \end{aligned}$$

となり, $|AB| = |A||B|$ がわかる.

Case 2: A が正則行列でない場合.

系 4.74 から $|A| = 0$ なので, (1.4) の右辺は 0 である. 一方, A が正則行列でないことから, $\text{rank } A < n$ であり, 従って基本行列 $P_1, P_2, \dots, P_{s-1}, P_s$ で,

$$P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 A \text{ の第 } n \text{ 行の成分はすべて } 0$$

となるような物が存在する. すると

$$P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 AB = (P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 A)B \text{ の第 } n \text{ 行の成分はすべて } 0$$

であり, 例題 4.26 より

$$|P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 A B| = 0$$

が成り立つ. さらに, 補題 3 を繰り返し用いることにより

$$0 = |P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 A B| = |P_s| |P_{s-1}| \cdots |P_2| |P_1| |A B|$$

となり, 基本行列 P_j について $|P_j| \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) であることから, $|A B| = 0$ を得る. すなわち, (1.4) の左辺・右辺ともに 0 であることが分り, 等式 (1.4) が示された. $\square$

転置行列の行列式に関して, 次の定理が成り立つ.

定理 5. 正方行列 A に対して

定理 4.80 と同じ

$$|^t A| = |A| \quad (1.5)$$

が成り立つ.

(証明). 二つの場合に分けて証明する.

Case 1: A が正則行列である場合.

このとき, 基本行列 $P_1, P_2, \dots, P_s$ で

$$A = P_s \cdots P_2 P_1$$

を満たすものがとれる. 従って, Web 「行列の転置」 命題 2(3) から,

$$^t A = ^t P_1 ^t P_2 \cdots ^t P_s$$

であり, 定理 4 から

$$|A| = |P_s| \cdots |P_2| |P_1| = |P_1| |P_2| \cdots |P_s|$$

$$|^t A| = |^t P_1| |^t P_2| \cdots |^t P_s|$$

となる. ここで, 基本行列 P に対して

$$|^t P| = |P|$$

が成り立つことは補題 1 より直ちに確かめられるから

$$|A| = |P_1| |P_2| \cdots |P_s| = |^t P_1| |^t P_2| \cdots |^t P_s| = |^t A|$$

が示された.

Case 2: A が正則行列でない場合.

このとき $^t A$ も正則行列ではない. (なぜなら, $^t A$ が正則行列ならば Web 「行列の転置」 命題 2 より $A = ^t(^t A)$ も正則行列となるから.) 従って, 系 4.74 により, (1.5) の両辺ともに 0 となり等式 (1.5) は成り立つ. $\square$