順列に関する補足

ここでは，定理 4.10 の後半を証明することが目標である．すなわち，与えられた順列を基本順列に変形する際に必要な互換の回数の偶・奇は，可能なすべての手順において共通であることを示す.

定義 1. n 次順列 σ に対して

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{k,l\}} \frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k - l}$$

と定める．ここで，記号 $\prod_{\{k,l\}}$ は集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の二個の元からなるすべての部分集合 $\{k, l\}$ に対して積をとることを表す．さらに

$$\frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k - l} = \frac{\sigma(l) - \sigma(k)}{l - k}$$

であることに注意する．例えば $n = 3$ のとき，$\{1, 2, 3\}$ の二個の元からなる部分集合は $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ の三つであるから 3 次の順列 σ に対して

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma(1) - \sigma(2)}{1 - 2} \cdot \frac{\sigma(1) - \sigma(3)}{1 - 3} \cdot \frac{\sigma(2) - \sigma(3)}{2 - 3}$$

である．従って $\sigma = (3\ 1\ 2)$ のとき

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{3 - 1}{1 - 2} \cdot \frac{3 - 2}{1 - 3} \cdot \frac{1 - 2}{2 - 3} = 1$$

である.

実は $\varepsilon(\sigma)$ の値は 1 または -1 のいずれかである.（系 5 参照.）

例 2. $\sigma = (3\ 4\ 2\ 1)$ のとき

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{3 - 4}{1 - 2} \cdot \frac{3 - 2}{1 - 3} \cdot \frac{3 - 1}{1 - 4} \cdot \frac{4 - 2}{2 - 3} \cdot \frac{4 - 1}{2 - 4} \cdot \frac{2 - 1}{3 - 4} = -1$$

補題 3. σ が基本行列ならば $\varepsilon(\sigma) = 1$ である.

(証明). σ が基本行列ならば $\sigma(i) = i$ が任意の i に対して成り立つから

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{k,l\}} \frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k - l} = \prod_{\{k,l\}} \frac{k - l}{k - l} = 1$$

となり示された. □

補題 4. 順列 σ に互換を一度行った順列を τ とする．このとき

$$\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$$

が成り立つ.

(証明). τ は σ の i 番目と j 番目を入れ替えて得られているものとする．すなわち，$k \neq i, j$ ならば $\tau(k) = \sigma(k)$ であり，$\tau(i) = \sigma(j), \tau(j) = \sigma(i)$ である．そこで，$\{1, 2, \dots, n\}$ の二個の元からなる部分集合 $\{k, l\}$ 全てを次の四つに分ける.

- $\{k,l\}\cap\{i,j\}=\emptyset$ すなわち k も l も i,j と異なる．
- $\{i,k\}$ $(k\neq i, k\neq j)$ すなわち片方が i で残りは j と異なる．
- $\{j,k\}$ $(k\neq i, k\neq j)$ すなわち片方が j で残りは i と異なる．
- $\{k,l\}=\{i,j\}$ すなわち $\{i,j\}$ と一致する．

そこで $\varepsilon(\tau)$ の計算に現れる積を四つに分けることにより

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\tau) &= \prod_{\{k,l\}} \frac{\tau(k)-\tau(l)}{k-l} \\
&= (\prod_{\substack{\{k,l\}\\ \{k,l\}\cap\{i,j\}=\emptyset}} \frac{\tau(k)-\tau(l)}{k-l}) \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\tau(i)-\tau(k)}{i-k}) \\
&\quad \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\tau(j)-\tau(k)}{j-k}) \cdot \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \\
&= (\prod_{\substack{\{k,l\}\\ \{k,l\}\cap\{i,j\}=\emptyset}} \frac{\sigma(k)-\sigma(l)}{k-l}) \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{i-k}) \\
&\qquad \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\sigma(i)-\sigma(k)}{j-k}) \cdot \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{i-j} \\
&= (\prod_{\substack{\{k,l\}\\ \{k,l\}\cap\{i,j\}=\emptyset}} \frac{\sigma(k)-\sigma(l)}{k-l}) \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{i-k} \cdot \frac{\sigma(i)-\sigma(k)}{j-k}) \\
&\qquad \cdot \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{i-j} \\
&= -(\prod_{\substack{\{k,l\}\\ \{k,l\}\cap\{i,j\}=\emptyset}} \frac{\sigma(k)-\sigma(l)}{k-l}) \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\sigma(i)-\sigma(k)}{i-k} \cdot \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{j-k}) \\
&\qquad \cdot \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \\
&= -(\prod_{\substack{\{k,l\}\\ \{k,l\}\cap\{i,j\}=\emptyset}} \frac{\sigma(k)-\sigma(l)}{k-l}) \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\sigma(i)-\sigma(k)}{i-k}) \\
&\qquad \cdot (\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{j-k}) \cdot \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \\
&= -\prod_{\{k,l\}} \frac{\sigma(k)-\sigma(l)}{k-l} = -\varepsilon(\sigma)
\end{aligned}
$$

となり示された． □

系 5. 順列 σ が r 回の互換によって基本順列に変形されると仮定する．このとき $\varepsilon(\sigma)=(-1)^r$ である．

ここまで示したことを用いて，目標としていた次の定理が証明できる．

定理 6. 順列 σ が r 回の互換によって基本順列に変形され，かつ s 回の互換によっても基本順列に変形されるとする．このとき r と s の偶奇は一致する．

(証明). 上の系から

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^r = (-1)^s$$

であるから，r と s の偶奇は一致する． □

注意 7. 実は，$\varepsilon(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ が成立する．各自で考えてみよ．