

一般の線形空間

● 定義と例

数ベクトルのもつ基本的性質を抽出することにより、抽象的に「ベクトル」や「ベクトル空間」を定義することができる。

定義 1. V を空ではない集合とする。任意の $x, y \in V$ とスカラー k に対して、和とよばれる演算 $x + y$ とスカラー倍とよばれる演算 kx が定義されていて、かつ V は（零ベクトルとよばれる）特別な元 $0 \in V$ を含み、各 $x \in V$ に対して $-x \in V$ で表される元が存在するものとする。そして、任意の $x, y, z \in V$ とスカラー k, l に対して、

演算が定義されているとは、 $x + y$ および kx が集合 V の元であることを意味する。

- (1) 和の結合法則: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (2) 和の交換法則: $x + y = y + x$
- (3) 零ベクトルとの和: $x + 0 = x$
- (4) 逆ベクトルとの和: $x + (-x) = 0$
- (5) スカラー倍の結合法則: $(kl)x = k(lx)$
- (6) スカラー 1 によるスカラー倍: $1x = x$
- (7) ベクトルの和に関する分配法則: $k(x + y) = kx + ky$
- (8) スカラー倍に関する分配法則: $(k + l)x = kx + lx$

が成り立つならば、 V を線形空間もしくはベクトル空間とよぶ。線形空間 V の元をベクトルとよび、 0 を零ベクトル、 $-x$ を x の逆ベクトルとよぶ。

命題 5.5, 問 5.4 (1)–(3) (p.125) にある計 8 つの計算法則

例 2. (1) (定義 1 は数ベクトルを手本としているのだから、言うまでもないが) 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は定義 1 の意味での線形空間である。

(2) $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間自体、ひとつの線形空間である。

(3) 幾何ベクトル全体は、定義 1.3, 定義 1.4 (p.2) で定めた和・スカラー倍で線形空間である。

(4) 数列に対して、和とスカラー倍を次のように定める：

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad k\{a_n\} = \{ka_n\}.$$

数列全体の集合は線形空間となる。とくに収束する数列のみを集めても線形空間である。

(5) 1 変数多項式全体の集合は、通常の演算（和・スカラー倍）に関して線形空間となる。とくに、自然数 n を固定して、次数が n 以下のものだけを集めても、ひとつの線形空間である。

(6) 区間 I で定義された連続関数全体の集合 $C(I)$ は、通常の演算（和・スカラー倍）に関して線形空間となる。とくに、実数 $L > 0$ を固定して、周期 L の連続関数のみを集めても、ひとつの線形空間である。

(7) 区間 I で定義された微分可能関数全体の集合 $C^\infty(I)$ は、通常の演算（和・スカラー倍）に関して線形空間となる。

(8) 与えられた関数 $P(x), Q(x)$ に対し、微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ を考える。この方程式の解全体のなす集合は線形空間である。

注意 3. 定義 1 においては、スカラーは実数であるという前提で線形空間の定義を述べた。しかし、スカラーは複素数であるとして、定義 1 を読めば、それは（複素）線形空間もしくは（複素）ベクトル空間とよばれるものの定義となる。

以下、（複素線形空間は扱わず）線形空間といったら実線形空間を意味する。

第 5 章では、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において、1 次結合、1 次独立、1 次従属、線形部分空間、生成について議論を行った。一般の線形空間 V においても、和とスカラー倍を V の演算に置き換えればこれらの概念を定義することができ、いくつかの定理や命題で述べた $\mathbb{R}^n$ についての諸性質もそのまま V に当てはまる。しかし、次元と基底については、 $\mathbb{R}^n$ と同様の場合とそうでない場合があり、注意が必要である。

定義 4. (1) 線形空間 V に n 個の 1 次独立なベクトルは存在するが、 $(n+1)$ 個の 1 次独立なベクトルは存在しないとき、 V は n 次元であるといい、 $\dim V = n$ と表す。そしてこのとき、 n 個の 1 次独立なベクトルを V の基底とよぶ。

(1) は $\mathbb{R}^n$ に対する定義と同じである。

(2) 線形空間 V に任意個数の 1 次独立なベクトルが存在するならば、 V は無限次元であるという。

どんな（大きな）自然数 n に対しても、 n 個の 1 次独立なベクトルが存在するということ。

例 2 の (4)–(7) は無限次元の線形空間である。（ただし、(5) の後半のものは $(n+1)$ 次元（有限次元）である。）(8) は 2 次元である。

● 線形写像

定義 5. 線形空間 V, X の間の写像 $f: V \rightarrow X$ が線形写像であるとは、任意の $x, y \in V$ とスカラー k に対して

一般の線形空間に関しても、線形性の成り立つ写像を線形写像とよぶのである。

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(kx) = kf(x) \quad (1.1)$$

が成り立つことをいう。また、1 対 1 かつ上への線形写像を（線形）同型写像という。

例 6. (1) 微分可能な（変数 x の）一変数関数全体のなす線形空間 $C^\infty(\mathbb{R})$ において、 d/dx を、関数に対してその導関数を対応させる写像と解釈しよう。すなわち、

$$\frac{d}{dx}: f(x) \mapsto \frac{df}{dx}(x).$$

この d/dx は $C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への線形写像である。

(2) 区間 $[0, 1]$ で連続な関数全体を $C([0, 1])$ で表す。写像 $\Phi: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

で定める。このとき、 Φ は線形写像である。

命題 7. 線形写像 $f: V \rightarrow X, g: X \rightarrow W$ の合成写像 $g \circ f: V \rightarrow W$ は線形写像である.

(証明). $g \circ f$ に対して, 線形性 (1.1) が成り立つことが簡単に確かめられる. (詳細は読者に任せる.) よって線形写像である. $\square$

● 計量線形空間

一般の線形空間には, 内積はあらかじめ備わっていないが, (線形空間によっては) 適切な内積が定義されることがある.

定義 8. V を実線形空間とする. 任意の $a, b \in V$ に対して, 実数 $a \cdot b$ を対応させる規則があって, Web「正規直交基底」の命題 1 に述べた性質 (1)–(4) を満たすならば, $a \cdot b$ は a と b の内積とよばれる.

(a, b) や $\langle a, b \rangle$ などで, a と b の内積を表すこともある.

内積の備わった線形空間は計量線形空間とよばれる.

例 9. 区間 $[\alpha, \beta]$ における連続関数全体のなす線形空間 $C([\alpha, \beta])$ において,

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$$

と定めると, これは内積となる.

例えば, $C([0, 2\pi])$ において, この内積を考えれば

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

は互いに直交することが確かめられる.