

基底の変換

• 有限次元線形空間と数ベクトル空間

V を n 次元線形空間とする. V の基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を固定しておく. このとき, $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\rho: \mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

で定め, この ρ を V の基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ による V から $\mathbb{R}^n$ への同型写像とよぶ. その名の通り, ρ は V から $\mathbb{R}^n$ への線形同型写像である. (読者自ら確かめよ.) $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$ を形式的に

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表したときに, 右辺に現れる縦ベクトルが $\rho(\mathbf{x})$ であると解釈すればよく, $\rho(\mathbf{x})$ を「 $\mathbf{x}$ の, 基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に関する成分表示」とよぶ.

例 1. 次数が n 以下の多項式全体の集合

$$P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

が有限次元の線形空間であることは, Web「一般の線形空間」の例 2 (5) でも紹介した. その基底として, $(n+1)$ 個の $1, x, \dots, x^n \in P_n$ をとることができ, $\dim P_n = n+1$ である. P_n の基底 $1, x, \dots, x^n$ による同型写像 $\rho: P_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は, $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in P_n$ に対して,

$$\rho(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

とすることで定義される.

(1.1) の $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ が線形同型写像であることは, 「有限次元線形空間は (基底を選んで固定しておけば) 数ベクトル空間として扱ってよい」ことを示唆している.

例えば, 線形写像 $f: V^n \rightarrow X^m$ があったときに, V, X の基底をそれぞれ固定しておき, 同型写像 $\rho_V: V \rightarrow \mathbb{R}^n, \rho_X: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ をとっておけば, $\rho_X \circ f \circ \rho_V^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を考えることができる. $\rho_X \circ f \circ \rho_V^{-1}$ もまた線形写像であり, 行列を用いて記述可能である. その手順を詳述しよう:

V の基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ および X の基底 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ が選んであるとする. $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, n$) の像 $f(\mathbf{a}_i)$ を基底 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ に関する 1 次結合で表したものを

$$f(\mathbf{a}_i) = c_{1i} \mathbf{b}_1 + \dots + c_{mi} \mathbf{b}_m = (\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_m) \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{pmatrix}$$

「数ベクトルは標準基底に関して成分表示されている」と解釈される.

有限次元線形空間 V の次元を明確にしたときなど, V の右肩にその次元を記す. つまり, n 次元線形空間 V は V^n のようにも書く.

とする。さらに、これら $f(\mathbf{a}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) を並べて、形式的な式

$$(f(\mathbf{a}_1) \cdots f(\mathbf{a}_n)) = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_m) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

を得る。ゆえに、 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$ に対しては

$$\begin{aligned} f: \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto (f(\mathbf{a}_1) \cdots f(\mathbf{a}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_m) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。従って、

$$\rho_X \circ f \circ \rho_V^{-1}: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

を得る。こうして得られる (1.2) の行列 (c_{ij}) を用いて、線形写像 $f: V \rightarrow X$ は (V の基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, X の基底 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ により) 行列 (c_{ij}) で表されると言い表す。

● 基底の変換

基底の選び方は一意的ではないことを度々指摘しているが、実際に異なる選び方をしたならば、どのような違いが起きるか調べてみよう。

V を n 次元線形空間とし、その基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ ともうひと組の基底 $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ を選んであるとする。 $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ を基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ による同型写像とし、 $\rho': V \rightarrow \mathbb{R}^n$ を基底 $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ による同型写像とする。つまり、

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \rho(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n) \rho'(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

である。一方、各 $\mathbf{a}'_j$ を基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ で表した式を

$$\mathbf{a}'_j = p_{1j} \mathbf{a}_1 + \cdots + p_{nj} \mathbf{a}_n \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

とする。これらを横に並べて

$$(\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n) = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.4')$$

と書けることに注意しておこう。

(1.4) で決まる $n \times n$ 行列 $P = (p_{ij})$ を, 基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ から $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ への変換を表す行列とよぶ.

(1.3), (1.4) より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

を得る. これは, 基底の変換でベクトルの成分表示にどのような違いが出るかを表している.

さらにもうひと組の基底 $\mathbf{a}''_1, \dots, \mathbf{a}''_n$ があって, $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ から $\mathbf{a}''_1, \dots, \mathbf{a}''_n$ への変換を表す行列を Q とする.

$$(\mathbf{a}''_1 \cdots \mathbf{a}''_n) = (\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n)Q = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)PQ$$

となるので, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ から $\mathbf{a}''_1, \dots, \mathbf{a}''_n$ への変換を表す行列は PQ であることがわかる. とくに, $\mathbf{a}''_1, \dots, \mathbf{a}''_n$ として $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ をとった場合 $PQ = I_n$, ゆえに $Q = P^{-1}$ を得る. すなわち, 基底の変換を表す行列 P は正則であり, 基底の逆変換を表す行列は逆行列 P^{-1} であると言える.

定理 2. $f: V^n \rightarrow V^n$ を線形変換とする. 基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V^n$ により f は行列 A で表されるとする. $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ もまた V^n の基底とし, $P = (p_{ij})$ を, 基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ から $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ への変換を表す行列とする. このとき, 基底 $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ による f を表す行列 A' は次で与えられる.

$$A' = P^{-1}AP.$$

(証明). 基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ による同型写像を $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, 基底 $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ による同型写像を $\rho': V \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする.

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ による f の行列表示が A であることは

$$f: \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)\rho(\mathbf{x}) \mapsto f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)A\rho(\mathbf{x}) \quad (1.6)$$

ということである. 同様に

$$f: \mathbf{x} = (\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n)\rho'(\mathbf{x}) \mapsto f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n)A'\rho'(\mathbf{x}) \quad (1.7)$$

である. 一方, 基底の変換を表す行列が P であることより,

$$(\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n) = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)P, \quad \rho(\mathbf{x}) = P\rho'(\mathbf{x})$$

が成り立つ. ((1.4'), (1.5) を見よ.) これを用いて (1.6) を書きなおすと

$$f: \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n)P^{-1}AP\rho'(\mathbf{x}) \quad (1.8)$$

を得る. (1.7), (1.8) より, $A' = P^{-1}AP$ が従う. $\square$