

線形写像

2 章 2.2 節で扱った平面上の 1 次変換の一般化を紹介する。

定義 1. ある $m \times n$ 行列 A により $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と記述できる写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は、線形写像 (1 次写像) とよばれる。とくに、同じ次元の数ベクトル空間の間の線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は線形変換 (1 次変換) とよばれる。

定理 2. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像であるための必要十分条件は、

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}), \quad f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a}) \quad (1.1)$$

が任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$ について成り立つことである。

(証明). 線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ が (1.1) を満たすことは、行列の性質より明らか。

逆に、写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が (1.1) を満たすことのみ仮定する。基本ベクトル $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, n$) の f による像を $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ とすれば、線形性 (1.1) を仮定しているので、任意の $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = f(x_1\mathbf{e}_1) + \dots + f(x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_nf(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \end{aligned}$$

となる。得られた等式は

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と記述することができ、ここに現れた $(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ は $m \times n$ 行列である。 $\square$

例題 3. $\mathbf{a}$ を $\mathbb{R}^3$ の定ベクトルとし、写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を外積 $\times$ を用いて $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ で定める。

(1) f が線形写像であることを示せ。(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ として、 f を行列で表せ。

(解答). (1) 外積の性質より $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, $f(k\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{x}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ が成り立つ。よって、定理 2 により f は線形写像である。

(2) 基本ベクトルの像は

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a} \times \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{a} \times \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえ、 f の行列による表示は次の通りである。

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

$\square$

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ は線形関数 (1 次関数) ともよばれる。

性質 (1.1) を、写像の線形性という。

定義 4. 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して,

$$\ker(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

と定め, これを写像 f の核とよぶ. また, f による $\mathbb{R}^n$ の像を $\text{Im}(f)$ と書く.

$\ker$ は kernel の略.

Im は image の略.

Web「 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間に関する補足」で述べた補題 1, および定理 5.56 (p.145) は, 線形写像の観点から述べると, 次のように換言される.

命題 5. 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して, $\ker(f)$ は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である. $\text{Im}(f)$ は $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間である.

(証明). $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ であるとき, $\ker(f)$ は, 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間に他ならないから, $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である.

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \text{Im}(f)$ とする. ある $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ により, $\mathbf{b}_1 = f(\mathbf{a}_1)$, $\mathbf{b}_2 = f(\mathbf{a}_2)$ と与えられるのだから, $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \in \text{Im}(f)$. また $k \in \mathbb{R}$ に対して $k\mathbf{b}_1 = kf(\mathbf{a}_1) = f(k\mathbf{a}_1) \in \text{Im}(f)$. ゆえに $\text{Im}(f)$ は $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間である. $\square$

定理 6. $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し, 次式が成り立つ.

(1) $\dim \text{Im}(f) = \text{rank } A$

(2) $\dim \ker(f) = n - \text{rank } A$

(証明). (1) $\text{rank } A = r$ として, $\dim \text{Im}(f) = r$ を示す.

まず, $\text{Im}(f) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \text{Span}\{A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n\}$ であることに注目する. 行列 A を $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ と表示した場合 $\mathbf{a}_j = A\mathbf{e}_j$ だから, $\text{Im}(f) = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ である.

一方, $\text{rank } A = r$ だから, A を行基本変形により階段行列に変形したとき, ピボットは r 個生じる. ピボットのある列番号を $p_1 < \dots < p_r$ とすれば $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \text{Span}\{\mathbf{a}_{p_1}, \dots, \mathbf{a}_{p_r}\}$ かつ $\mathbf{a}_{p_1}, \dots, \mathbf{a}_{p_r}$ は 1 次独立である.

従って, $\mathbf{a}_{p_1}, \dots, \mathbf{a}_{p_r}$ は $\text{Im}(f)$ の基底となるから, $\dim \text{Im}(f) = r$ である.

(2) 主張は定理 5.56 (p.145) の言い換えに過ぎない. $\square$

定義 7. 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が 1 対 1 かつ上への線形写像であるとき, f を (線形) 同型写像とよぶ.

命題 8. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形同型写像ならば $n = m$ でなければならない.

つまり, 次元の異なる数ベクトル空間の間には, 同型写像は存在し得ない.

(証明). f は行列 A を用いて $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と記述されるものとする. f が 1 対 1 であることから $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ ゆえ, 定理 6 (2) より, $\text{rank } A = n$ である. 一方, f が上への写像であることから $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ ゆえ, 定理 6 (1) より, $\text{rank } A = m$ である. 従って, $n = m$ ($= \text{rank } A$) を得る. $\square$

命題 8 より, 線形同型写像 f を考えるときは, 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から自分自身への変換 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ であることを前提として始めればよい.

定理 9. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ について, それが線形同型写像であることと $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (A は n 次 正則 行列) と記述されることは同値である.

(証明). $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が線形同型写像ならば, その行列表示 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ において (命題 8 の証明中で見たように) $\text{rank } A = n$ ゆえ A は正則行列である.

逆に, 正則行列 A による線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が 1 対 1 かつ上への写像であることはほとんど明らかであろう. (詳細は読者に任せる.) $\square$

定理 10. 線形同型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の逆写像 f^{-1} も線形同型写像である. 実際, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ この定理の証明も明と記述されるとき, 逆写像 f^{-1} は A の逆行列 A^{-1} を用いて $f^{-1}: \boldsymbol{x} \mapsto A^{-1}\boldsymbol{x}$ で与えられる. らかであろう.