$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間に関する補足

• 命題 5.46 の証明

ここでは，命題 5.46 (p.141) の証明を与える．

Step 1:
任意の W に対して $\dim W \geq 0$ であることは自明であり，$\dim W \leq n$ であることは系 5.20 (p.131) から従う．

Step 2-1:
$\{\mathbf{0}\}$ から取り出せるのは $\mathbf{0}$ のみであり，$\mathbf{0}$ 単独では 1 次従属である．つまり $\{\mathbf{0}\}$ から 1 次独立なベクトルの組は取り出すことができない．従って，$\{\mathbf{0}\}$ から取り出せる 1 次独立なベクトルの最大数は 0 ゆえ $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ である．

Step 2-2:
我々は，$\mathbb{R}^n$ には n 個の 1 次独立なベクトルが存在することを知っている．（基本ベクトルを考えればよい.）そして，$(n+1)$ 個以上のベクトルは必ず 1 次従属となることも知っている．（系 5.20.）ゆえに $\dim \mathbb{R}^n = n$ である．

Step 3-1:
$W \neq \{\mathbf{0}\}$ と仮定する．最初に W に属するベクトル $\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$ を任意にとる．$\boldsymbol{a}_1$ 単独で 1 次独立な 1 つのベクトルからなる組と考えられるから，少なくとも $\dim W \geq 1$ ゆえ $\dim W \neq 0$ である．言い換えれば，$\dim W = 0$ ならば $W = \{\mathbf{0}\}$ でなければならない．

Step 3-2:
最後に，$\dim W = n$ の場合を考える．すなわち，W から n 個の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を取り出せるとする．W は線形部分空間なのだから $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \subset W$ である．一方，それらは $\mathbb{R}^n$ の基底となるのだから $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ である．（p.135, 定理 5.31.）従って $\mathbb{R}^n \subset W$ である．ゆえに $W = \mathbb{R}^n$ である． □

• 定理 5.56 の証明

ここでは，定理 5.56 (p.145) の証明を与える．そのために補題を用意しておく．

補題 1. A を $m \times n$ 行列とするとき，集合 $V = \{\, A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \}$ は $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間であり $\dim V = \operatorname{rank} A$ である．

(証明).

(Step1; 線形部分空間であること):

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ とすると，ある $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が存在して $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{b}$ と書ける．そして，

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = A\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} = A(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \in V, \quad k\boldsymbol{u} = kA\boldsymbol{a} = A(k\boldsymbol{a}) \in V$$

となるから，V は $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間である．

(Step2; V の次元):

V に属する任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，ある $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が存在して $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{b}$ と書けるわけだが，このときの $\boldsymbol{b}$ を標準基底により $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$ と表したならば，

$$\boldsymbol{v} = A(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n) = b_1A\boldsymbol{e}_1 + b_2A\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_nA\boldsymbol{e}_n \tag{1.1}$$

である．以上は $V \subset \operatorname{Span}\{A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n\}$ を意味する．(1.1) の右辺から左辺への式変形を考えれば $V \supset \operatorname{Span}\{A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n\}$ もわかる．結局

$$V = \operatorname{Span}\{A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n\} \tag{1.2}$$

である．

一方，行列 A を列ベクトルによる分割表示で $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ と表したならば，

$$(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = A = AI_n = A(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n) = (A\boldsymbol{e}_1\ A\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{e}_n)$$

ゆえ，各列 $\boldsymbol{a}_j$ は $A\boldsymbol{e}_j$ に等しい．従って，(1.2) と合わせて

$$V = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$$

を得る．定理 5.55 (p.144) より，$\dim V = \operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = \operatorname{rank} A$ である． □

（定理 ***5.56*** の証明）．

$\operatorname{rank} A = r$ とおいて，$W = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ に対し $\dim W = n - r$ を示そう．

Step 1:

$V = \{\, A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ とする．補題 1 より，V は $\mathbb{R}^m$ の r 次元線形部分空間である．そこで，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を選んでおく．ここで選んだ $\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ は V の元なのだから，$A\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{v}_j$ を満たす $\boldsymbol{b}_j \in \mathbb{R}^n$ が各 j で存在する．そのような $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ も選んでおく．

Step 2:

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を任意のベクトルとする．$A\boldsymbol{x} \in V$ を，Step 1 で選んだ基底の 1 次結合として書いたものを $A\boldsymbol{x} = \sum k_j\boldsymbol{v}_j$ とすると，

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{r} k_j\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{r} k_jA\boldsymbol{b}_j = A\left(\sum_{j=1}^{r} k_j\boldsymbol{b}_j\right)$$

となる．右辺において，A との積に現れたベクトルを $\boldsymbol{x}' = \sum k_j \boldsymbol{b}_j$ と書こう．すると $A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ であるから，$A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0}$ である．すなわち $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' \in W$ である．解空間 W の次元を s で表すものとし，W の基底 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s$ も選んでおき，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ をそれらの 1 次結合で $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' = \sum l_i \boldsymbol{a}_i$ のように表しておく．このとき

$$\boldsymbol{x} = \sum l_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{x}' = \sum_{i=1}^{s} l_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{r} k_j \boldsymbol{b}_j$$

となって，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r\}$ が従う．今，$\boldsymbol{x}$ は任意なのだから

$$\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r\}$$

である．逆向きの包含関係は自明なことであるから，結局

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r\}$$

を得る．

Step 3:

$(s+r)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である．なぜなら，1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{a}_s + c_{s+1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{s+r}\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0}$$

を考えると，この両辺に A を掛けて

$$\boldsymbol{0} + c_{s+1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{s+r}\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$$

を得るが，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ の 1 次独立性から $c_{s+1} = \cdots = c_{s+r} = 0$ でなければならない．従って，今考えている 1 次関係は $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}$ に帰着する．今度は，$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s$ の 1 次独立性から $c_1 = \cdots = c_s = 0$ でなければならない．

Step 4:

Step 2 と Step 3 より，$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r$ は $\mathbb{R}^n$ の基底をなすといえる．従って，$n = \dim \mathbb{R}^n = s + r$ を得る．ゆえに $\dim W = s = n - r = n - \mathrm{rank}\, A$ である． $\square$