

固有ベクトルの1次独立性

ここでは6.2節の定理6.24 (p.158) の証明を与える.

(証明). m に関する数学的帰納法で証明する. $m = 1$ のとき, 基底の定義より $\mathbf{u}_{1,1}, \dots, \mathbf{u}_{1,d_1}$ は1次独立であるから定理は正しい. $m = k - 1 \geq 1$ のとき定理の主張が正しいと仮定し, $m = k$ のとき定理が成り立つことを示す. ベクトルの組

$$\mathbf{u}_{1,1}, \dots, \mathbf{u}_{1,d_1}, \dots, \mathbf{u}_{k,1}, \dots, \mathbf{u}_{k,d_k}$$

が1次関係

$$c_{1,1}\mathbf{u}_{1,1} + \dots + c_{1,d_1}\mathbf{u}_{1,d_1} + \dots + c_{k,1}\mathbf{u}_{k,1} + \dots + c_{k,d_k}\mathbf{u}_{k,d_k} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

をもつとする. (1.1) の両辺に左から A を掛けると, $\mathbf{u}_{i,j}$ が固有値 λ_i に関する固有ベクトルであることから,

$$\lambda_1(c_{1,1}\mathbf{u}_{1,1} + \dots + c_{1,d_1}\mathbf{u}_{1,d_1}) + \dots + \lambda_k(c_{k,1}\mathbf{u}_{k,1} + \dots + c_{k,d_k}\mathbf{u}_{k,d_k}) = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

となる. (1.2) - $\lambda_k \times$ (1.1) を計算すると,

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_k)(c_{1,1}\mathbf{u}_{1,1} + \dots + c_{1,d_1}\mathbf{u}_{1,d_1}) + \dots \\ & \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)(c_{k-1,1}\mathbf{u}_{k-1,1} + \dots + c_{k-1,d_{k-1}}\mathbf{u}_{k-1,d_{k-1}}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

であり, 帰納法の仮定から

$$\mathbf{u}_{1,1}, \dots, \mathbf{u}_{1,d_1}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,1}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,d_{k-1}}$$

は1次独立なので,

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_k)c_{1,1} = 0, \dots, (\lambda_1 - \lambda_k)c_{1,d_1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda_{k-1} - \lambda_k)c_{k-1,1} = 0, \dots, (\lambda_{k-1} - \lambda_k)c_{k-1,d_{k-1}} = 0 \end{cases}$$

である. また $1 \leq i \leq k - 1$ について $\lambda_i \neq \lambda_k$ より,

$$c_{1,1} = 0, \dots, c_{1,d_1} = 0, \dots, c_{k-1,1} = 0, \dots, c_{k-1,d_{k-1}} = 0 \quad (1.3)$$

である. ここで (1.1) と (1.3) より,

$$c_{k,1}\mathbf{u}_{k,1} + \dots + c_{k,d_k}\mathbf{u}_{k,d_k} = \mathbf{0}$$

であり, $\mathbf{u}_{k,1}, \dots, \mathbf{u}_{k,d_k}$ は $W(\lambda_k, A)$ の基底で1次独立なので,

$$c_{k,1} = 0, \dots, c_{k,d_k} = 0$$

となる. 以上より1次関係 (1.1) は自明になるので,

$$\mathbf{u}_{1,1}, \dots, \mathbf{u}_{1,d_1}, \dots, \mathbf{u}_{k,1}, \dots, \mathbf{u}_{k,d_k}$$

は1次独立である. □