対称行列の直交行列による対角化

この節では，対称行列が直交行列により対角化可能であることを学ぶ．

定義 1 (対称行列)**.** n 次正方行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとき，A を**対称行列**という．また A のすべての成分が実数であるような対称行列を，特に**実対称行列**とよぶ．

この節では，実数だけでなく複素数も扱うため，すべての成分が実数である場合には，実対称行列という用語を用いる．

対称行列の固有ベクトルは次の性質をもつ．

定理 2. λ_1，λ_2 を対称行列 A の相異なる固有値とし，$\boldsymbol{u}_i$ を λ_i に関する固有ベクトルとする．このとき $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ である．

(証明).

$$\begin{aligned}\lambda_1(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2) &= (\lambda_1\boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{u}_2 = {}^t(\lambda_1\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_2 = {}^t(A\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_2 = {}^t\boldsymbol{u}_1({}^tA)\boldsymbol{u}_2 \\ &= {}^t\boldsymbol{u}_1A\boldsymbol{u}_2 = {}^t\boldsymbol{u}_1(\lambda_2\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_1 \cdot (\lambda_2\boldsymbol{u}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2)\end{aligned}$$

より，$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2) = 0$．ここで，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ が成り立つ． □

6.1 節の例 6.9 (p.152) のように，n 次正方行列 A のすべての成分が実数であっても，A の固有値は実数であるとは限らない．一般に n 次正方行列 A の固有方程式は，複素数の範囲では必ず解をもつ．また λ を A の固有方程式の複素数解とするとき，連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明な複素数解をもつ．つまり，零ベクトルでない n 項複素数ベクトル $\boldsymbol{u}$ で，$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ を満たすものが存在する．従って，n 次正方行列 A は複素数の範囲では必ず固有値と固有ベクトルをもつ．

次の定理により，A が実対称行列の場合には，その固有値は必ず実数となり，実数ベクトルの範囲で固有ベクトルが存在することがわかる．

定理 3. A が実対称行列ならば，A の固有値はすべて実数である．

(証明). λ を A の固有値とし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ をその固有ベクトルとする．$\boldsymbol{u}$ の複素共役を $\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix}$ とするとき，$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ の両辺の複素共役をとると，A の各成分が実数であるから $A\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{u}}$ が成り立つ．このとき

λ は複素数で，$\boldsymbol{u}$ は複素数ベクトルと考えているが，実際には λ が実数の範囲に含まれていることを示す．

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}) &= (\lambda\boldsymbol{u}) \cdot \bar{\boldsymbol{u}} = {}^t(\lambda\boldsymbol{u})\bar{\boldsymbol{u}} = {}^t(A\boldsymbol{u})\bar{\boldsymbol{u}} = {}^t\boldsymbol{u}({}^tA)\bar{\boldsymbol{u}} \\ &= {}^t\boldsymbol{u}A\bar{\boldsymbol{u}} = {}^t\boldsymbol{u}(\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{u} \cdot (\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{u}}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{u}})\end{aligned}$$

x，y を実数とするとき，複素数 $u = x + yi$ の複素共役とは $\bar{u} = x - yi$ のことである．

より，$(\lambda - \bar{\lambda})(\boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}) = 0$ となる．$\boldsymbol{u} \neq 0$ より，$\boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{u}} = |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \neq 0$ であるから，$\lambda = \bar{\lambda}$ が成り立つので，λ は実数である． □

複素数 u に対し，$u\bar{u} = |u|^2 \geq 0$ であり，等号成立は $u = 0$ のときに限ることに注意する．

注意 4. 定理 3 より，実対称行列 A の固有値 λ は実数であり，固有ベクトルは実数係数の同次連立 1 次方程式の非自明な解となる．従って固有値 λ に関する固有ベクトルとして実数ベクトルがとれる．

定理 5. 実対称行列 A は対角化可能である．

(証明). A を n 次実対称行列とする．n に関する数学的帰納法で証明する．$n=1$ のとき，A は対角行列なので，定理の主張は正しい．$n \geq 2$ とし，任意の $(n-1)$ 次実対称行列が対角化可能であると仮定する．$\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ_1 に関する固有ベクトルで $|\boldsymbol{u}_1| = 1$ を満たすものとする．$\mathbb{R}^n$ の部分集合を

n 次実対称行列とは，n 次正方行列で実対称行列であるもののことである．

$$W = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0\}$$

とすると，W は $\mathbb{R}^n$ の $(n-1)$ 次元部分空間となる．（Web「正規直交基底」の公式 (1.2) を参照.）$\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を W の正規直交基底とするとき，$2 \leq i \leq n$ について，

W は $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1\}$ の直交補空間である．

$$(A\boldsymbol{u}_i) \cdot \boldsymbol{u}_1 = {}^t(A\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_1 = {}^t\boldsymbol{u}_i({}^tA)\boldsymbol{u}_1 = {}^t\boldsymbol{u}_i A\boldsymbol{u}_1 = {}^t\boldsymbol{u}_i(\lambda_1\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$$

より，$A\boldsymbol{u}_i \in W$ である．従って，$A\boldsymbol{u}_i$ は $\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合

$$A\boldsymbol{u}_i = b_{2,i}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + b_{n,i}\boldsymbol{u}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2,i} \\ \vdots \\ b_{n,i} \end{pmatrix}$$

と表される．このとき，

$$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2,2} & & b_{2,n} \\ & \cdots & \\ b_{n,2} & & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

であるから，$R = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_{2,2} & & b_{2,n} \\ & \cdots & \\ b_{n,2} & & b_{n,n} \end{pmatrix}$ とおけば，$AR = RB$ が成り立つ．また，$\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が W の正規直交基底であることから，${}^tRR = I_{n-1}$ となる．従って，

$${}^tB = {}^tB\,{}^tRR = {}^tR\,{}^tAR = {}^tRAR = {}^tRRB = B$$

より，B は $(n-1)$ 次実対称行列である．帰納法の仮定より，$(n-1)$ 次正則行列 Q で $Q^{-1}BQ$ が対角行列になるものが存在する．ここで，

$AR = RB$ であるから，${}^tR\,{}^tA = {}^tB\,{}^tR$ となることに注意する．

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & RQ \end{pmatrix}$$

とおくと，${}^tR\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$ より，

この $\boldsymbol{0}$ は $(n-1)$ 項の零ベクトルを表す．

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1 \\ Q^{-1}\,{}^tR \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 & {}^t\boldsymbol{u}_1 RQ \\ Q^{-1}\,{}^tR\boldsymbol{u}_1 & Q^{-1}\,{}^tRRQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$$

であるから，

${}^tR\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$ であるから，${}^t\boldsymbol{u}_1 R = {}^t\boldsymbol{0}$ となる．

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1 \\ Q^{-1}\,{}^tR \end{pmatrix}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1 \\ Q^{-1}\,{}^tR \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & RQ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1 \\ {}^tR \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1 \\ {}^tR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\boldsymbol{u}_1 & AR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1 \\ {}^tR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{u}_1 & RB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q^{-1}BQ \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

は対角行列になるので，A は対角化可能である． □

定理 6. 実対称行列は直交行列により，対角化可能である．つまり，実対称行列 A に対し，直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものが存在する．

(証明). n 次実対称行列 A の固有値全体の集合を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ とし，固有空間 $W(\lambda_i, A)$ の次元を d_i とするとき，定理 5 より A は対角化可能なので，6.4 節の定理 6.42 (p.164) より，$d_1 + \cdots + d_m = n$ が成り立つ．$\boldsymbol{u}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{u}_{i,d_i}$ を $W(\lambda_i, A)$ の正規直交基底とすれば，定理 2 より，

$$\boldsymbol{u}_{1,1}, \dots, \boldsymbol{u}_{1,d_1}, \dots\dots, \boldsymbol{u}_{m,1}, \dots, \boldsymbol{u}_{m,d_m}$$

は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底になる．従って，

Web「正規直交基底」の問 11 を参照.

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{1,d_1} & \cdots\cdots & \boldsymbol{u}_{m,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{m,d_m} \end{pmatrix}$$

は直交行列となり，6.3 節の定理 6.31 (p.160) より，$P^{-1}AP$ は対角行列になる． □

例題 7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．

(解答). A の固有値は 1 と 3 であり，固有値 1 の固有ベクトルとして $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，固有値 3 の固有ベクトルとして $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．よって，$\dfrac{\boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は固有空間 $W(1, A)$ の正規直交基底であり，$\dfrac{\boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_2|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は固有空間 $W(2, A)$ の正規直交基底である．従って，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおけば，P は直交行列であり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ が成り立つ． □

注意 8. 一般に n 次実対称行列 A が n 個の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ をもつ場合には，固有値 λ_j の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ として，長さ $|\boldsymbol{u}_j| = 1$ であるものをとり，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$ とおけば，定理 2 より P は直交行列となり，A は P により対角化することができる．固有多項式が重解をもつ場合には，次の例題のようにシュミットの直交化法（Web「正規直交基底」の命題 5）を用いればよい．

例題 9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．

(解答). A の固有多項式は，$F_A(t) = (t+1)^2(t-5)$ であるから，A の固有値は -1 と 5 である．固有値 -1 に関する固有空間は，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $W(-1, A) = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ である．ここで，シュミットの直交化法により，

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2'}{|\boldsymbol{b}_2'|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は $W(-1, A)$ の正規直交基底になる．また固有値 5 に関する固有空間は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で生成されるので，長さ 1 の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ がとれる．以上より，$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおけば，P は直交行列であり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ が成り立つ． □

問 10. 次の対称行列 A を直交行列により対角化せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

● 問の略解

問 10 (p.4) (1) $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とすると，P は直交行列で，$P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすると，P は直交行列で，$P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(3) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とすると，P は直交行列で，$P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.