連立微分方程式への対角化の応用

この節では行列の対角化の応用として，定数係数の連立常微分方程式の解法を紹介する．A を n 次正方行列とするとき，関数 $y_1(x),\dots,y_n(x)$ に関する微分方程式

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

を考える．A が n 次正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化されているとき，

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} &= P^{-1}APP^{-1} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 z_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_n z_n(x) \end{pmatrix}$$

となる．$z_j'(x) = \alpha_j z_j(x)$ を満たす関数 $z_j(x)$ は定数 c_j により $z_j(x) = c_j e^{\alpha_j x}$ と表されるので，

$z_j'(x) = \alpha_j z_j(x)$ は変数分離型の基本的な微分方程式である．

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_1 x} \\ \vdots \\ c_n e^{\alpha_n x} \end{pmatrix}$$

により，連立微分方程式 (1.1) の解が求められる．

例題 1. 連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + 2y_2(x), \end{cases} \qquad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 3$$

の解を求めよ．

(解答). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，連立微分方程式は

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

と表される．6.3 節の例 6.30 (p.160) より，A は正則行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ により，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化される．従って，定数 c_1，c_2 を用いて

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3x} - c_2 e^{x} \\ c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$y_1(0) = 1$，$y_2(0) = 3$ より $\begin{cases} c_1 - c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$ であるから，$c_1 = 2$，$c_2 = 1$ となる．以上より，解は $\begin{cases} y_1(x) = 2e^{3x} - e^{x} \\ y_2(x) = 2e^{3x} + e^{x} \end{cases}$ である． □

問 2. 次の連立微分方程式の解を求めよ．

6.3 節の問 6.40 (p.163) の結果を用いるとよい．

(1) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 8y_2(x) \\ y_2'(x) = 2y_1(x) + y_2(x), \end{cases} \qquad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 2$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 3y_2(x) - y_3(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) + y_3(x) \\ y_3'(x) = y_1(x) - 3y_2(x) + 3y_3(x), \end{cases} \qquad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 3, \quad y_3(0) = 1$

(3) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - 2y_2(x) - 2y_3(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) - 2y_2(x) - 4y_3(x) \\ y_3'(x) = -y_1(x) + y_2(x) + 3y_3(x), \end{cases} \qquad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad y_3(0) = 0$

● 問の略解

問 2 (p.2) (1) $\begin{cases} y_1(x) = -2e^{-3x} + 2e^{5x} \\ y_2(x) = e^{-3x} + e^{5x} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y_1(x) = -2e^{-x} + 4e^{2x} \\ y_2(x) = 2e^{-x} + e^{2x} \\ y_3(x) = 2e^{-x} - e^{2x} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y_1(x) = 2e^{-x} - e^{x} \\ y_2(x) = 2e^{-x} + e^{x} - e^{2x} \\ y_3(x) = -e^{x} + e^{2x} \end{cases}$