1. ベクトルと空間図形

幾何ベクトル (p.1, 2)

- 向きをもった線分を**有向線分**（ゆうこうせんぶん）という．有向線分において，その位置を問題にせず，向きと長さのみに着目したものを**ベクトル**という．点 A を始点, 点 B を終点とする有向線分の表すベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す.
- ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が**等しい**
  $\Longleftrightarrow$ 有向線分 AB と有向線分 CD は，同じ長さと同じ向きをもつ.
  $\Longleftrightarrow$ 有向線分 AB を平行移動すると有向線分 CD にぴったり重なる.
- 通常，ベクトルを小文字の**太字** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ などで表す（高校数学の $\vec{a}, \vec{b}$ に相当）.
- $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に対し，線分 AB の長さをベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さといい，$|\boldsymbol{a}|$ で表す.
- 長さ 0 のベクトルを**零ベクトル**といい，$\boldsymbol{0}$ で表す (向きはない).

幾何ベクトルの和・スカラー倍 (p.2, 3)

- ベクトル $\boldsymbol{a}$ の終点とベクトル $\boldsymbol{b}$ の始点を一致させる．このとき，
  $\boldsymbol{a}$ の始点と $\boldsymbol{b}$ の終点を結ぶベクトルが**和** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ である.

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \text{ のとき，}\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

- 実数 k に対し，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の k 倍 (**スカラー倍**) $k\boldsymbol{a}$ は，

$$\begin{cases} k \geq 0 \text{ のとき，}\quad \boldsymbol{a} \text{ と同じ向きで，長さ } k \text{ 倍のベクトル} \\ k < 0 \text{ のとき，}\quad \boldsymbol{a} \text{ と逆向きで，長さ } |k| \text{ 倍のベクトル} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆向きのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい，
  $-\boldsymbol{a}$ で表す: $-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$，$-\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$
- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が**平行**
  $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$，を満たす実数 k がある.
  $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす 3 点 O, A, B は同一直線上にある.
- ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**差** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$: $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

ベクトルの和・スカラー倍の基本性質 (p.4)

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （交換法則）

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （結合法則）

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ (4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$

(5) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ (6) $(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

(7) $(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a})$

(8) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

(9) $|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$

位置ベクトル (p.6)

- 基準点 O を決めたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を点 A の**位置ベクトル**といい，
  小文字の太字 $\boldsymbol{a}$ で表すことが多い.
- 2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

平面ベクトルの成分表示 (p.7–9)

O を原点とする座標平面において，

- $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を**縦ベクトル** $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ で表す.
- 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

  零ベクトル: $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}$ の逆ベクトル: $-\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき，

  $$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}, \quad k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}, \qquad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$
- $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を座標平面の**基本ベクトル**という.

  $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$.

空間ベクトルの成分表示 (p.9, 10)

O を原点とする座標空間において，

- $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を

  縦ベクトル $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ で表す.

- 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

  零ベクトル: $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{a}$ の逆ベクトル: $-\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき，

  $$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}, \quad k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

- $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を座標空間の**基本ベクトル**という.

  $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$.

ベクトルの内積 (p.11–13)

- ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ とする．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

- ベクトルの内積と成分

平面ベクトル: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

空間ベクトル: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

内積の基本性質 (p.14, 15)

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 \geq 0, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(4) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

(5) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})$

(6) （分配法則） $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

2 次，3 次の行列式 (p.15–17, 24, 25)

- **2 次の行列式:** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\det(\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

- **3 次の行列式：** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\det(\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 \\ -c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - b_1a_2c_3$$

平行四辺形の面積 (p.15–19)

- 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積 S:

$$S = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

- 平面ベクトル，空間ベクトルそれぞれの場合， S は次のようにも求められる．

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積 S:

$$S = |a_1b_2 - a_2b_1| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の張る平行四辺形の面積 S:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} \end{aligned}$$

空間ベクトルの外積 (p.19–21)

- ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して，**外積** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

で定義されるベクトル．

- 幾何的には，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は次の (1)〜(3) を満足するベクトル：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 両方と垂直なベクトル．

(2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でないとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はこの順序で右手系をなす．

外積の代数的性質 (p.21, 22)

- (1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

  (2) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

  (3) （分配法則）$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$,
  $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

  (4) $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

- 結合法則 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は一般には**成り立たない**.

スカラー 3 重積と 3 次の行列式 (p.23–25)

3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対して，

- $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$ が成立する.
  これらを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の**スカラー 3 重積**という.

- スカラー 3 重積は 3 次の行列式 $\det(\, \boldsymbol{a} \ \boldsymbol{b} \ \boldsymbol{c} \,)$ に等しい：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\, \boldsymbol{a} \ \boldsymbol{b} \ \boldsymbol{c} \,) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

平行六面体の体積 (p.25)

3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ の張る平行六面体の体積 V:

$$V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$

直線の方程式，パラメーター表示 (p.26–29)

点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に平行な直線 l:

- l のベクトル方程式: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{v}$ 　(t はパラメーター)
  ここで, $\boldsymbol{p}_0$ は点 P_0 の位置ベクトル.
- l のパラメーター表示: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ 　(t はパラメーター)
- l の方程式: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

平面の方程式 (p.29–32)

点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

平面のパラメーター表示 (p.33, 34)

点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を含む平面 π:

- π のベクトル方程式: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ 　(s, t はパラメーター)
  ここで, $\boldsymbol{p}_0$ は点 P_0 の位置ベクトル.
- π のパラメーター表示: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 s + v_1 t \\ y = y_0 + u_2 s + v_2 t \\ z = z_0 + u_3 s + v_3 t \end{cases}$ 　(s, t はパラメーター)