

2. 行列と1次変換

2 次行列とその積 (p.37-41)

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のように, 4 個の数や文字を正方形に並べてかっこでくくったものを **2 次行列** という.

- 2 次行列とベクトルの積: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} & \overrightarrow{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \downarrow \\ y \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

- 行列 A とベクトルの積について, 次の性質が成り立つ.
 - (1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して, $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$.
 - (2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ とスカラー k に対して, $A(k\boldsymbol{x}) = k(A\boldsymbol{x})$.

- 2 次行列の積: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して,

$$AB = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} & \overrightarrow{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \downarrow & q \downarrow \\ r \downarrow & s \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

- 2 次行列 A, B, C に対して, 積の結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$

が成り立つ.

- 2 次行列 A, B に対して, 積の交換法則 $AB = BA$ は一般には 成り立たない.

2 次行列の逆行列 (p.41-44)

- 行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 2 次単位行列という. 任意の 2 次行列 A に対して,

$$AI = IA = A$$

が成り立つ.

- 2 次行列 A に対し, $AX = XA = I$ をみたす 2 次行列 X が存在するとき, この X を A の逆行列という.

- A の逆行列は存在するとは限らないが, 存在すればただ 1 つで, これを A^{-1} とかく. つまり,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

- 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して定まる数

$$|A| = ad - bc$$

を 2 次行列 A の行列式という.

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が存在する $\iff |A| = ad - bc \neq 0$ であり, このとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である. ここで, 2 次行列のスカラー倍は次のように定義される: k をスカラーとすると,

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}.$$

平面上の 1 次変換 (p.44-47)

- 平面上の点をある一定の規則で移動させることを平面上の変換という.
- 座標平面上の変換 f によって点 $P(x, y)$ が移る点を $P'(x', y')$ とする. ある定数 a, b, c, d が存在して,

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \text{ すなわち } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表されるとき, f を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換という.

- 原点を中心とする角度 θ の回転は,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

が表す 1 次変換である.

合成変換と逆変換 (p.47-49)

- 行列 A が表す平面の 1 次変換 f において, 点 P が移る点を P' とする. 点 P, P' の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ すると $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ となるから, 1 次変換 f は

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と表される. つまり, 1 次変換はベクトルの変換と考えることもできる.

- 1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ に対して,

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x}))$$

で定まる $f \circ g$ を, g と f の合成変換という. このとき,

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$$

である. つまり, 1 次変換の合成は行列の積に対応する.

- 2 次行列 A の逆行列 A^{-1} が存在すると仮定する. A が表す 1 次変換を f , A^{-1} が表す 1 次変換を g とすると,

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \quad (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

が成り立つ. この g を f の逆変換とよび, f^{-1} と表す.

1 次変換の線形性 (p.49-52)

- 1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は次の 2 つの性質を満たす.

$$(1) f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}).$$

$$(2) f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x}) \quad (k \text{ は任意のスカラー}).$$

この 2 つの性質を合わせて 1 次変換の線形性という. 線形性は 1 次変換の重要な性質である.

- 線形性は次のように 1 つの式にまとめることもできる. $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を 1 次変換とするとき, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ と任意のスカラー k_1, k_2 に対して,

$$f(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2) = k_1f(\boldsymbol{x}_1) + k_2f(\boldsymbol{x}_2) .$$

一般の行列 (p.52, 53)

- mn 個の数 a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) を,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように長方形に並べてかっこでくくったものを $m \times n$ 行列という.

- $m \times n$ 行列 A に対して, 上から i 番目の横の配列を A の第 i 行, 左から j 番目の縦の配列を A の第 j 列という. 第 i 行と第 j 列の交点に位置する a_{ij} を A の (i, j) 成分という.
- (i, j) 成分が a_{ij} である行列 A を $A = (a_{ij})$ と略記する.

一般の行列の演算 (p.53-55)

- 行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ が共に $m \times n$ 行列 (同じサイズ) のとき,

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n),$$

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}), \quad kA = (ka_{ij}).$$

- $m \times l$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $l \times n$ 行列 $B = (b_{ij})$ に対して, 積 AB は次のように定義される $m \times n$ 行列である:

$$AB = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj}.$$

- A の列の数と B の行の数が一致しない場合は, 積 AB は定義されない.

行列の演算の性質 (p.56)

- 行列 A, B, C に対して, 次が成り立つ. (ただし, 以下の等式に現れる行列の演算はすべて定義されるものと仮定する.)
 - (1) 積の結合法則: $(AB)C = A(BC)$.
 - (2) 積の分配法則: $A(B + C) = AB + AC$.
 - (3) 積の分配法則: $(A + B)C = AC + BC$.
 - (4) k をスカラーとすると, $(kA)B = k(AB) = A(kB)$.

n 次行列 (p.57, 58)

- $n \times n$ 行列を **n 次行列** とよぶ.
- n 次行列の (i, i) 成分 ($i = 1, \dots, n$) を **対角成分** という.
- 対角成分がすべて 1 で, 対角成分以外の成分がすべて 0 であるような n 次行列を **n 次単位行列** といい I_n で表す. 任意の $m \times n$ 行列 A に対して,

$$AI_n = I_m A = A$$

が成り立つ.

- n 次行列 A に対して, $AX = XA = I_n$ をみたす n 次正方行列 X が存在するとき, この X を **A の逆行列** という.
- n 次行列 A の逆行列は存在するとは限らないが, 存在すればただ 1 つで, これを A^{-1} とかく:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

- n 次行列 A の逆行列 A^{-1} が存在するとき, A は **正則行列** であるという.

行列の分割 (p.58–60)

- 行列をいくつかのより小さいサイズの行列に分割して表すことを, **行列の分割表示** といい, 行列の積の計算において有用である.
- $m \times n$ 行列 A は, 各列を $m \times 1$ 行列 (列ベクトルまたは縦ベクトル) と見なすと, それらを横に並べたものとして,

$$A = \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array} \right)$$

と表すことができる. これを行列の**列ベクトルによる分割**という.

- $m \times n$ 行列 A は, 各行を $1 \times n$ 行列 (行ベクトルまたは横ベクトル) と見なすと, それらを縦に並べたものとして,

$$A = \left(\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{array} \right)$$

と表すことができる. これを行列の**行ベクトルによる分割**という.