

3. 連立1次方程式と行列

連立1次方程式 (p.65-70)

- いくつかの1次方程式の集まり

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を、連立1次方程式という。

- 連立1次方程式の解とは、これら m 個の1次方程式を同時に満たす数の組 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のことをいう。
- 上記の連立1次方程式は、行列を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

と表すこともできる。すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とすれば、上記の連立1次方程式は

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

のように、とても簡単に記述できる。

- 連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対し、 A を係数行列といい、 A と $\mathbf{b}$ を並べてできる行列 $(A \ \mathbf{b})$ を拡大係数行列という。

行列の行基本変形 (p.71, 72)

- 行列に対して,
 - (1) 1つの行に0でない定数を掛ける.
 - (2) 2つの行を入れ替える.
 - (3) 1つの行の定数倍を他の行に加える.
 という3種類の変形を行列の行基本変形という.
- 行基本変形は可逆な変形である.
- 連立1次方程式 $Ax = b$ の拡大係数行列 $(A \ b)$ が行基本変形により $(A' \ b')$ に変形されたとき, $Ax = b$ と $A'x = b'$ は同じ解の集合をもつ.

階段行列 (p.72-74)

- 階段行列とは, 以下のような行列 B のことである.
 ある整数 $r \geq 1$ があって, B の第1行から第 r 行までの各行はピボットとよばれる数1を含み, 次の条件 (1)–(3) を満たす.
 - (1) B の第 $(r+1)$ 行から最後の行までの各行において, すべての成分が0.
 - (2) B の第1行から第 r 行までの各行では, ピボットより左の成分はすべて0.
 - (3) B の第 i 行のピボットが含まれる列の番号を p_i とすると, $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ であり, B の第 p_i 列ではピボット以外の成分はすべて0.
 — つまり, 階段行列 B は以下のような形のものである.

$$B = \begin{matrix} & \underbrace{p_1} & & \underbrace{p_2} & \cdots & \underbrace{p_r} \\ \begin{matrix} 1) \\ 2) \\ \vdots \\ r) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- ピボットの数 r を階段行列 B の階数 (ランク) といい, $\text{rank } B$ と表す.
- 便宜上, 零行列 O も階段行列であるものとし, その階数は0と定める.

行列の階数 (p.74-76)

任意の行列 A は, 行基本変形を繰り返し行うことにより, 階段行列 B に変形される. この階段行列 B は行基本変形の仕方によらず, A のみによってただ1つに定まる. この B を A の階段行列とよぶ. また, B の階数を行列 A の階数 (ランク) とよび, $\text{rank } A$ と表す.

- $m \times n$ 行列 A に対して, $\text{rank } A \leq m$ および $\text{rank } A \leq n$ が成り立つ.
- 行列の階数は行基本変形で変わらない.

行列を用いた連立1次方程式の解法 (p.76–78) —

連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解法 (掃き出し法):

- 拡大係数行列 $(A \ \mathbf{b})$ に行基本変形を繰り返し行い, A の部分を階段行列に変形する.
 - (i) $\text{rank} A \neq \text{rank}(A \ \mathbf{b})$ のときは 解なし.
 - (ii) $\text{rank} A = \text{rank}(A \ \mathbf{b})$ のときは, A の階段行列のピボットのない列に対応する各未知数を任意定数とし, 残りの未知数をそれらの任意定数で表す.

連立1次方程式の解についての定理 (p.76–81) —

連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は, $\text{rank}(A \ \mathbf{b}) = \text{rank} A$ である. そしてこのとき,

- (1) $\text{rank} A = n$ (= 未知数の個数) ならば, 解はただ1つに定まる.
- (2) $\text{rank} A < n$ (= 未知数の個数) ならば, 解は無限個あり, $(n - \text{rank} A)$ 個の任意定数を用いて表される.

応用 (逆行列の計算) (p.84–89) —

- A を n 次正方行列とする. A と単位行列 I_n を並べてできる $n \times 2n$ 行列

$$(A \ I_n)$$

に行基本変形を繰り返し行い, 階段行列に変形する. その変形が

- (1) $(A \ I_n) \rightarrow \cdots \rightarrow (I_n \ B)$ であったならば, ($\text{rank} A = n$ であり) $(I_n \ B)$ の右半分に現れた行列 B が A の逆行列である.
- (2) (1) のような変形結果でなかったならば, ($\text{rank} A < n$ であり) A は逆行列をもたない.