

4. 行列式

順列とその符号 (p.91–93)

- n 個の整数 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ を一列に並べたものを n 次順列とよび,

$$\sigma = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \sigma(3) \ \cdots \ \sigma(n))$$

等と表す.

- 順列 $(1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ n)$ を $(n$ 次) 基本順列とよぶ.
- 順列の二つの数を入れ替えて, 新しい順列を作る操作を互換という.
- 偶順列と奇順列
 - 偶順列: 偶数回の互換により基本順列に変形される順列
 - 奇順列: 奇数回の互換により基本順列に変形される順列
- 順列 σ の符号 $\text{sgn}(\sigma)$ を

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ が偶順列のとき} \\ -1 & \sigma \text{ が奇順列のとき} \end{cases}$$

と定める.

行列式の定義 (p.94–98)

- n 次行列式を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma: n \text{ 次順列}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定める.

- 2 次行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 3 次行列式 (サラスの公式):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- 一つの行の成分がすべて 0 である行列式の値は 0 である.
- 上三角行列の行列式は対角成分の積に等しい.
- $|I| = 1$ (I は単位行列)

行列式の性質 I (p.98–105)

- 行に関する性質：

- (1) 一つの行から共通因数をくくり出すことができる。
- (2) 一つの行の定数倍を他の行に加えても行列式の値は変わらない。
- (3) 二つの行を入れ替えると行列式の値は (-1) 倍になる。

- 列に関する性質：

- (1) 一つの列から共通因数をくくり出すことができる。
- (2) 一つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない。
- (3) 二つの列を入れ替えると行列式の値は (-1) 倍になる。

- n 次正方行列 A に対し

$$|A| \neq 0 \iff \text{rank } A = n$$

である。

行列式の展開 (p.105–110)

- 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 A の i 行および j 列を取り除いて得られる（次数が一つ小さい）正方行列を A_{ij} とし、

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

を A の (i, j) 余因子という。

- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} \\ &= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} \end{aligned}$$

が成立する。上を第 i 行に関する展開、下を第 j 列に関する展開とよぶ。

余因子行列と逆行列 (p.111–115)

- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して $\tilde{a}_{ij}$ をその (i, j) 余因子とする. このとき

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

と定め, これを A の余因子行列とよぶ. (並べ方に注意!)

- A を n 次正方行列, $\tilde{A}$ をその余因子行列とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|I \quad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

が成立する.

- 正方行列 A に対して

$$A \text{ は正則行列} \iff |A| \neq 0$$

である. さらに $|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

が成立する.

クラメル公式 (p.115–117)

- 連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

について条件

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立するとき, その解は

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{j}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

である.

行列式の性質 II (p.118, 119)

- n 次正方行列 A, B に対して

$$|AB| = |A||B|$$

が成立する.

- n 次正方行列 A に対して

$$|^tA| = |A|$$

が成立する.