

5. 数ベクトル空間

 n 項数ベクトル (p.123, 124) n 個の数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を縦に並べたもの

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を n 項数ベクトルまたは n 次元数ベクトルという.

- 成分表示された平面ベクトルや空間ベクトルの自然な一般化である.
- n 項数ベクトルは (その形から) $n \times 1$ 行列であると言ってもよい.
- n 項数ベクトル全体のなす集合を $\mathbb{R}^n$ で表し, n 次元数ベクトル空間という.

 n 項数ベクトルの和・スカラー倍 (p.124, 125)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ とスカラー } k \in \mathbb{R} \text{ に対し,}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad k\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

と定める. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の和, $k\mathbf{a}$ を k による $\mathbf{a}$ のスカラー倍という.

- $n \times 1$ 行列としての和・スカラー倍ということもできる.
- すべての成分が 0 のベクトルを $\mathbf{0}$ で表し, 零ベクトルという.
- $(-1)\mathbf{a}$ は $-\mathbf{a}$ で表される.
- 次の計算法則が成り立つ.
 - (1) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (2) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (3) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
 - (4) 和の結合法則: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
 - (5) 和の交換法則: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
 - (6) ベクトルの和に関する分配法則: $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$
 - (7) スカラー倍の分配法則: $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$
 - (8) スカラー倍の結合法則: $(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$

幾何ベクトルの1次独立性 (p.125–127)

● 1次独立性の定義

- ◇ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行ではないことを, 「2つの幾何ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は1次独立 (または線形独立) である」という.
- ◇ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が (始点の一致する有向線分で表されたとき) 同一平面上にないことを, 「3つの幾何ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は1次独立 (または線形独立) である」という.
- ◇ 2つまたは3つの幾何ベクトルが1次従属 (または線形従属) であるとは, それらが1次独立ではないことを意味する.

● 1次独立性の言い換え (その1)

- ◇ 2つ (3つ) の幾何ベクトルが1次従属であるとは, それらの張る平行四辺形の面積 (平行六面体の体積) が0であることをいう. そして, 1次従属ではないことを1次独立という.

● 1次独立性の言い換え (その2)

- ◇ いくつかの幾何ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ が1次独立であるとは

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

を成立させる実数 c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) が $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ に限ることを意味する. そして, 1次独立ではないことを1次従属という.

1次独立と1次従属 (p.128–130)

- ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ に対し,

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

の形のベクトルを, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ の1次結合 (または線形結合) という.

- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ に関して, それらのある1次結合が零ベクトルとなるという式:

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

を, ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ の1次関係 (または線形関係) という.

- ◇ ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ に成立する1次関係が自明なものに限ることを, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ は1次独立 (または線形独立) であると言い表す.
- ◇ 1次独立ではないことを1次従属 (または線形従属) という.

- 第 j 成分のみが1であり, その他の成分がすべて0である n 項数ベクトルを $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ と書き, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルという. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は1次独立である.

1 次独立性の判定法など (p.130–132)

- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ に対し, 1 次独立 $\iff \text{rank}(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m) = m$.

◇ $\mathbb{R}^n$ において, $(n+1)$ 個以上のベクトルは必ず 1 次従属.

◇ $\mathbb{R}^n$ において, n 個のベクトルについて次の (1)–(4) は同値:

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立
- (2) $\text{rank}(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) = n$
- (3) $\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \neq 0$
- (4) 行列 $(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ は正則

1 次従属なベクトルの 1 次関係 (p.133, 134)

- P が n 次正則行列ならば, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ の 1 次独立性と $P\mathbf{a}_1, \dots, P\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ の 1 次独立性は一致する.
- $n \times m$ 行列 $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m)$ に行基本変形を繰り返して階段行列 $B = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_m)$ が得られるとき, ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ とベクトル $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ は, 同一の 1 次関係をもつ.

 $\mathbb{R}^n$ の基底 (p.135, 136)

- $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立な n 個のベクトルを, $\mathbb{R}^n$ の基底とよぶ.
 - ◇ 基底の選び方は無数にある.
 - ◇ 基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり, $\mathbb{R}^n$ の標準基底とよばれる.
- $\mathbb{R}^n$ において, 基底が選ばれているとき, 任意のベクトルは基底の 1 次結合として一意的に表すことができる.

 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 (p.137–139)

$\mathbb{R}^n$ の空集合ではない部分集合 W が次の 2 条件

- (1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ に対して, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$,
- (2) 任意の $\mathbf{x} \in W$ とスカラー k に対して, $k\mathbf{x} \in W$

を満たすとき, W は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 (もしくは部分ベクトル空間) という. または単に部分空間という.

- ◇ $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ を任意に選んでおき

$$W = \{c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \mid c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

と定めると, これは $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる. この W を, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ が張る (または生成する) 部分空間とよび, $W = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ などと書き表す.

◇ $\mathbb{R}^n$ 自身は明らかに $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である.

◇ $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルのみを含む集合 $\{\mathbf{0}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である.

- $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 W は零ベクトル $\mathbf{0}$ を必ず含む.

同次連立1次方程式の解空間 (p.139, 140)

A を $m \times n$ 行列とする. 同次連立1次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ の解全体のなす集合 W は, $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間となる. この W を, $Ax = \mathbf{0}$ の解空間とよぶ.

基底と次元 (p.141-145)

$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 W に, m 個の1次独立なベクトルは存在するが, どんな $(m+1)$ 個のベクトルを選んでもそれらが1次従属であるとき, W の次元は m である, もしくは W は m 次元であるといい, $\dim W = m$ と表す. そしてこのとき, m 個の1次独立なベクトルを W の基底とよぶ.

- $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 W に対し $0 \leq \dim W \leq n$ である. とくに

$$\diamond \dim W = 0 \iff W = \{\mathbf{0}\}$$

$$\diamond \dim W = n \iff W = \mathbb{R}^n$$

- $\dim(\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}) \leq m$
- $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 W とそれに属する1次独立なベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ に対し, 次の3条件は同値:
 - (i) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ は W を張る. すなわち, $W = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$.
 - (ii) $\dim W = m$
 - (iii) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ は W の基底である.

◇ 条件 (i) を満たす1次独立なベクトルを見つければ, W の基底を見つけたこととなる. そしてその個数が次元である.

◇ W の任意のベクトルは W の基底の1次結合で表せる.

◇ 1つの線形部分空間に対して, 基底のとり方は無数にある.

- 必ずしも1次独立ではない n 項数ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\dim(\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}) = \text{rank}(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m).$$

- $m \times n$ 行列 A による同次連立1次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ の解空間の次元は $n - \text{rank } A$ である.

 $\mathbb{R}^2$ および $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間の幾何的特徴づけ (p.145)

- $\mathbb{R}^2$ の部分集合 W に対して, 次の2条件は同値である:

(I) W は $\mathbb{R}^2$ の線形部分空間である.

(II) W は $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^2$, または原点を通る直線のいずれかである.

- $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W に対して, 次の2条件は同値である:

(I) W は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間である.

(II) W は $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, 原点を通る平面, または原点を通る直線のいずれかである.