

6. 固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトル (p.149, 150) —

n 次正方行列 A に対し、スカラー λ と零ベクトルでない n 項数ベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ が、

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

を満たすとき、 λ を A の固有値といい、 $\mathbf{u}$ を A の固有値 λ に関する固有ベクトルという。

固有値の求め方 (p.150, 151) —

n 次正方行列 A に対し、 t についての多項式 $F_A(t) = |tI - A|$ を A の固有多項式という。スカラー λ が A の固有値となるための必要十分条件は λ が固有方程式

$$|tI - A| = 0$$

の解となることである。したがって、 A の固有値を求めるには固有方程式を解けばよい。

固有ベクトルの求め方 (p.152–155) —

n 次正方行列 A の固有値の 1 つを λ とする。零ベクトルでない n 項数ベクトル $\mathbf{u}$ が A の固有値 λ に関する固有ベクトルになるための必要十分条件は

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

を満たすことである。したがって、 A の固有値 λ に関する固有ベクトルを求めるには、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

についての同次連立 1 次方程式

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の非自明な解を求めればよい。

固有空間 (p.156–159) —

n 次正方行列 A の固有値 λ に対し、同次連立 1 次方程式

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の解空間 $W(\lambda, A)$ を A の固有値 λ に関する固有空間という。つまり、固有空間 $W(\lambda, A)$ は固有値 λ に関する固有ベクトル全体の集合に零ベクトル $\mathbf{0}$ を加えて得られる $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間である。また固有空間 $W(\lambda, A)$ の次元は

$$\dim W(\lambda, A) = n - \text{rank}(\lambda I - A)$$

である。

行列の対角化 (p.159, 160)

n 次正方行列 A に対し, n 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを求め,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と表すことを, A の対角化という.

対角化の方法 (p.160–163)

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を n 次正方行列 A の固有値とする. $1 \leq j \leq n$ について, $\mathbf{u}_j$ を固有値 α_j に関する固有ベクトルとし, $P = (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n)$ とおく. もし P が正則行列ならば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

対角化可能性 (p.163, 164)

n 次正方行列 A に対し, n 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものが存在するとき, A は対角化可能であるという. A の固有値全体の集合を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ とする.

$$\dim W(\lambda_1, A) + \cdots + \dim W(\lambda_m, A) = n$$

が成り立つとき, 各固有空間の基底を並べて $P = (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n)$ とおけば, P は必ず正則行列となり, A は対角化可能である. 一方,

$$\dim W(\lambda_1, A) + \cdots + \dim W(\lambda_m, A) < n$$

である場合には, P をどのようにとっても対角化することはできない.

行列の m 乗の計算 (p.165, 166)

n 次正方行列 A が n 次正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化されているとき, 自然数 m について

$$A^m = P \begin{pmatrix} \alpha_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

が成り立つ.