

LMO 関手による写像類群の部分群の可換商

佐藤 正寿（東京電機大学）

野崎雄太 (横浜国立大学), 鈴木正明 (明治大学) との共同研究に基づく

2023 年 12 月 15 日

1. 研究内容の紹介

自身の興味

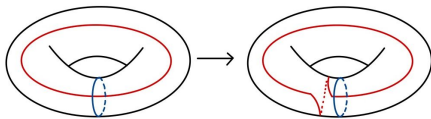
曲面の対称性（写像類群） $\longleftrightarrow$ 低次元（3,4 次元）トポロジー

対称性の例

(1) 等長的な対称性



(2) より一般の対称性（Dehn ツイスト）



曲面の写像類群

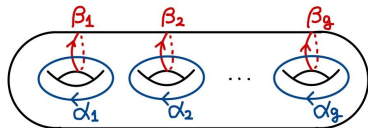


Σ_g の写像類群 $\mathcal{M}_g = \{\Sigma_g \text{の向きを保つ同相写像全体}\} / \text{連続変形}$.
 (一般の対称性は大きすぎるので “割る”)

例：

- $\mathcal{M}_0 = \text{Homeo}_+(S^2) / \text{連続変形} = \{1\}$
- $\mathcal{M}_1 \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$
 $(\mathcal{M}_1 \rightarrow \text{Aut}(H_1(T^2; \mathbb{Z})) = \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \text{ は単射})$

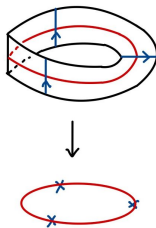
ただし, $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$.



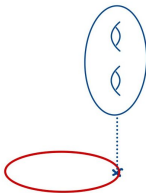
次のものを通して, 曲面の対称性 (写像類群) が現れる.

- 曲面束のモノドロミー
- 曲面に沿う 3 次元多様体の切り貼り

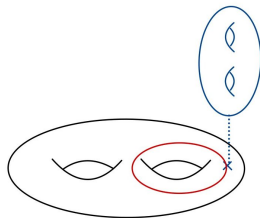
メビウスの帯



円周上の曲面束



曲面上の曲面束



特に次に興味がある.

- 曲面の写像類群の群構造
- 3,4 次元多様体の位相不変量の写像類群による記述

群 $\mathcal{M}_g$ について,

- アーベル化 ($\mathcal{M}_g/[\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g] = 0$ ($g \geq 3$)) ,
- 群の表示 (Dehn ツイストで生成される) ,
- (種数について) 安定コホモロジー環の構造,

などはわかっているが, $g \geq 2$ 以上において $\mathcal{M}_g$ は複雑な群である.
理由の 1 つは, $g \geq 2$ において,

$$\mathcal{I}_g = \text{Ker}(\mathcal{M}_g \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}))) : \text{Torelli 群}$$

が大きい群であるためである. 例えば,

- $\mathcal{I}_2$ は無限生成自由群 [Mess], $\mathcal{I}_g$ ($g \geq 3$) は有限生成 [Johnson],
- $\mathcal{I}_g/[\mathcal{I}_g, \mathcal{I}_g] \cong \mathbb{Z}^{\binom{2g}{3} - \binom{2g}{1}} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\binom{2g}{2} + \binom{2g}{1}}$ ($g \geq 3$) [Johnson],
- $([\mathcal{I}_g, \mathcal{I}_g]/[\mathcal{I}_g, [\mathcal{I}_g, \mathcal{I}_g]]) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{\frac{(2g+3)2g(2g-1)(2g-2)}{12} + 1}$ ($g \geq 3$) [Hain].

2. 今回得られた結果

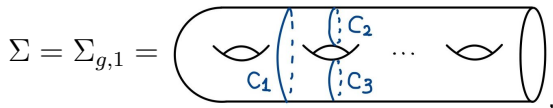
以降の話では, 曲面は (空でない) 連結な境界をもつものを考える.

$$\Sigma = \Sigma_{g,1} = \left(\text{Diagram of a genus } g \text{ surface with one boundary component} \right),$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{g,1} = \text{Homeo}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1}) / (\text{境界を固定する連続変形}),$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{g,1} = \text{Ker}(\mathcal{M} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}))) : \text{Torelli 群}.$$

以降の話では、曲面は (空でない) 連結な境界をもつものを考える.



$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{g,1} = \text{Homeo}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1}) / (\text{境界を固定する連続変形}),$

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{g,1} = \text{Ker}(\mathcal{M} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})))$: Torelli 群.

Torelli 群の元の例: Dehn ツイスト $T_{c_1}, T_{c_2} T_{c_3}^{-1}$.

Torelli 群の降中心列を以下のように表す.

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(1) \supset [\mathcal{I}, \mathcal{I}] = \mathcal{I}(2) \supset [\mathcal{I}, [\mathcal{I}, \mathcal{I}]] = \mathcal{I}(3) \supset \cdots$$

今回の話の内容

3次元多様体の不変量 (LMO 関手) を使って, 次数商 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ を調べた.

定理 [野崎-鈴木-S]

n を奇数, $g \gg n$ とする.

このとき, 加群 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ にはトーション元がある.

なぜ大事か

- 次数商 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ はホモロジー 3 球面の有限型不変量と関係がある. ($n=1$ は Rochlin 不変量)
- 奇数次の次数商 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ にトーション元があることを初めて発見した.

3. LMO 関手とは

(Kontsevich 不変量 $\rightarrow$ LMO 不変量 $\rightarrow$
LMO 関手)

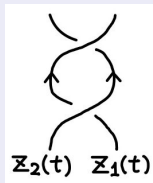
結び目の Kontsevich 不変量

定義：2-ブレイドの Kontsevich 不変量

$\mathbb{C} \times [0, 1]$ 内の 2-ブレイド $z_1(t)$, $z_2(t)$ に対して,

$$Z^K(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{z_1'(t) - z_2'(t)}{z_1(t) - z_2(t)} dt$$

と定める.



例： $b = (z_1(t), z_2(t))$, $z_1(t) = e^{2\pi i t}$, $z_2(t) = -e^{2\pi i t}$ について,

$$Z^K(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i(e^{2\pi i t} + e^{2\pi i t})}{e^{2\pi i t} + e^{2\pi i t}} dt = 1.$$

($z_1(t)$ と $z_2(t)$ の絡み目数)

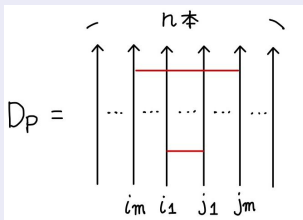
定義： n -ブレイドの Kontsevich 不変量

n -ブレイド $b = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ について,

$$\alpha_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{z'_i(t) - z'_j(t)}{z_i(t) - z_j(t)} dt,$$

$$Z^K(b) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{P=((i_1 j_1), \dots, (i_m j_m))} \right)$$

$$\int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1} \alpha_{i_1 j_1}(t_1) \wedge \dots \wedge \alpha_{i_m j_m}(t_m) D_P$$



と定める.

↪ 結び目, 絡み目の不変量 [Kontsevich]

(Morse 結び目で考え, 臨界点の相殺で不変になるよう補正を行う)

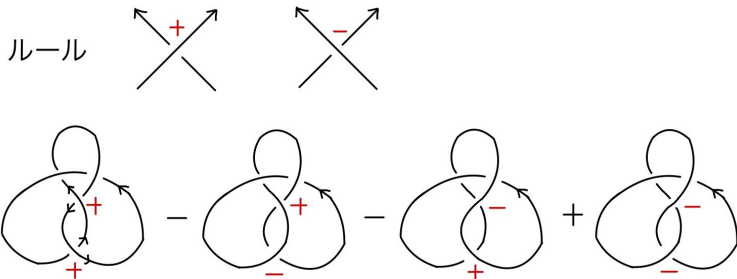
有限型不変量

$\mathcal{K}$: S^3 内の結び目全体の集合,

$\mathbb{Q}\mathcal{K}$: $\mathcal{K}$ の生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間.

結び目の不変量, つまり, 写像 $\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Q}$ を考えることと,
線型写像 $\mathbb{Q}\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Q}$ を考えることは同じである.

線型写像 $\mathbb{Q}\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Q}$ の中で, 次のような元はすべて 0 にうつすものを 1 次の有限型不変量と呼ぶ.



定理 [Kontsevich]

Kontsevich 不変量は有限型不変量に対して普遍的である.

定理 [大槻]

Kontsevich 不変量は量子不変量に対して普遍的である.

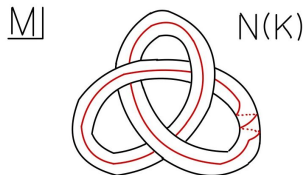
Dehn 手術

結び目から 3 次元多様体をつくる操作を紹介する.

M : 3 次元多様体, $K \subset M$: 枠付き結び目.

3 次元多様体を M から

$$M_K = (M \setminus \text{Int } N(K)) \cup D^2 \times S^1$$



に取り換えることを Dehn 手術と呼ぶ.

ただしここで $\partial M \setminus \text{Int } N(K) \cong S^1 \times S^1$ であることに注意し,
赤い線 (枠) が D^2 の境界となるように $D^2 \times S^1$ を接着する.

LMO 不変量

M : 連結な有向閉 3 次元多様体,

L : S^3 内の枠付き絡み目であり, $S_L^3 \cong M$.

定理 [Le-村上-大槻]

L の Kontsevich 不変量を用いて, M の位相不変量 (LMO 不変量) を構成できる.

定理 [Le, 大槻, 葉廣, 葉廣-Le]

整ホモロジー球面に LMO 不変量を制限すると, 有限型不変量 ([Le]), 摂動的な不変量 ([大槻]), 量子不変量 ([葉廣, 葉廣-Le]) に対して普遍性をもつ.

問: LMO 不変量の関手的拡張は?

答: LMO 関手 (以下の圏の間の関手)

LMO 関手 [Cheptea-葉廣-Massuyeau]

LMO 関手とは次の圏の間の関手.

あるコボルディズムの圏

対象： $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (+q-structure) ,

射： $\Sigma_{g,1}$ と $\Sigma_{h,1}$ の間の, “ホモロジー条件” を満たす 3 次元コボルディズム (+q-structure),

射の合成：3 次元コボルディズムを上下に接着する.

あるヤコビ図の圏

対象： $\mathbb{Z}_{\geq 0}$,

射： $\{1^+, \dots, g^+, 1^-, \dots, h^-\}$ をラベルにもつ, ある 1-3 価グラフの生成する $\mathbb{Q}$ 係数の無限級数,

射の合成：+ ラベルをもつ 1 価頂点と - ラベルをもつ 1 価頂点をくっつける.

ヤコビ図

定義 (ヤコビ図)

ヤコビ図とは次の 1,3 価頂点をもつグラフである.

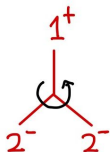
- 1 価頂点は $\{1^+ \dots, g^+, 1^-, \dots, h^-\}$ でラベル付けされている.
- 3 価頂点には接する 3 つの辺の巡回順序が指定されている.

ヤコビ図の 3 価頂点の個数を次数と呼ぶ.

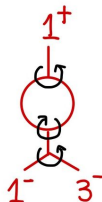


deg=0

strut



deg=1

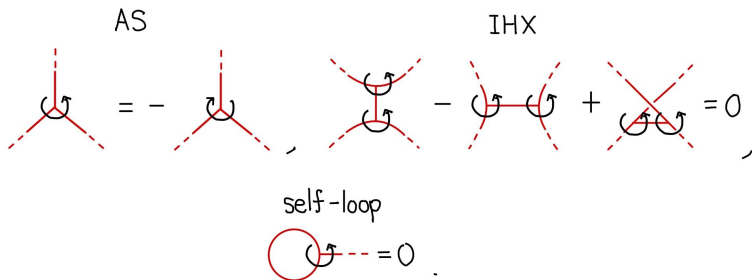


deg=3

定義 ($\mathcal{A}^Y, \mathcal{A}^c$)

$\mathbb{Z}\{\text{strut comp. のないヤコビ図}\}/(\text{AS, IHX, self-loop relations}).$

を次数について完備化したもの（無限級数）を $\mathcal{A}^Y$ と表す。
特に連結なヤコビ図だけを考えたものを $\mathcal{A}^c$ と表す。



$$\mathcal{A}_1^c = \left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} j \quad \text{---} k \end{array} \right| i, j, k \in \{1^\pm, \dots, g^\pm\} \rangle$$

$$= \mathbb{Z}^{\binom{2g}{3}} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{2g(2g+1)},$$

$$\begin{array}{c} 1^+ \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} 2^+ \quad \text{---} 2^+ \end{array} \stackrel{\text{反転}}{=} \begin{array}{c} 1^+ \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} 2^+ \quad \text{---} 2^+ \end{array} \stackrel{\text{AS}}{=} - \begin{array}{c} 1^+ \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} 2^+ \quad \text{---} 2^+ \end{array}$$

$$\mathcal{A}_2^c = \left\langle \begin{array}{c} i \quad j \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} k \quad \text{---} l \end{array} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} j \end{array} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} j \end{array} \right\rangle$$

注意

$\mathcal{A}^Y$ は2つのヤコビ図の i^+ と i^- を接着することで積が定まる。

コボルディズムの圏で, 対象 $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する.

$\Sigma_{g,1}$ の間のコボルディズムとして, ホモロジーシリンダーのなすモノイド $\mathcal{IC}$ に LMO 関手を制限すると,

$$\tilde{Z}^Y: \mathcal{IC} \rightarrow \mathcal{A}^Y \otimes \mathbb{Q} \quad (\text{モノイド準同型})$$

が得られる.

計算例

$$\tilde{Z}^Y(T_{c_1}) = \emptyset - \frac{1}{2} \left(\text{diagram} \right) + \frac{1}{4} \left(\text{diagram} \right) + (\deg \geq 4).$$

The diagrams are represented as follows:

- The first diagram is a vertical line with a red circle around it. The top of the line is labeled 1^+ and the bottom is labeled 1^- . The circle has a red arrow pointing clockwise.
- The second diagram consists of two vertical lines. The top of the left line is labeled 1^+ and the bottom is labeled 1^- . The top of the right line is labeled 1^+ and the bottom is labeled 1^- . There are red arrows pointing from the top of the left line to the top of the right line and from the bottom of the left line to the bottom of the right line.

4. ホモロジーシンダーとは

曲面 Σ のホモロジーシリンダー

定義

M : 連結な有向コンパクト 3次元多様体,

$m: \partial(\Sigma \times [-1, 1]) \xrightarrow{\cong} \partial M$: 向きを保つ同相写像,

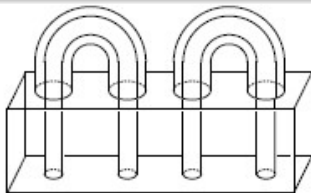
$m_+: \Sigma \rightarrow \partial M$: 上面への制限, $m_-: \Sigma \rightarrow \partial M$: 底面への制限.

(M, m) が Σ のホモロジーシリンダーであるとは,

$$(m_+)_* = (m_-)_*: H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_1(M; \mathbb{Z})$$

を満たすことをいう. (つまり, $(m_-)_*^{-1} \circ (m_+)_* = \text{id}_{H_1(\Sigma; \mathbb{Z})}$.)

$$\Sigma \times [-1, 1] =$$



$\mathcal{IC} = \{\Sigma \text{のホモロジーシリンダー}\} / \text{同型}.$

- $\mathcal{IC}$ は上下に重ねることでモノイドをなす.

$$(M, m_+, m_-) \circ (N, n_+, n_-) = (M \cup_{m_+ = n_-} N, n_+, m_-) = \boxed{\begin{array}{c} N \\ M \end{array}}.$$

- 単射準同型

$$\iota: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{IC},$$

$$\varphi \mapsto (\Sigma \times [-1, 1], \text{id}_{\Sigma \times \{-1\}} \cup \varphi \times \{1\})$$

が存在する.

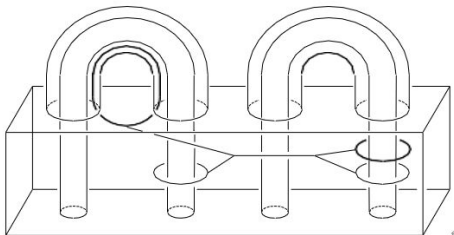
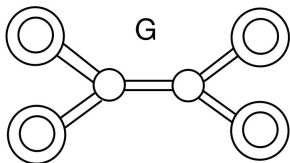
クラスパー手術 [葉廣, Goussarov]

モノイド IC に部分モノイド列をつくるための準備をする.

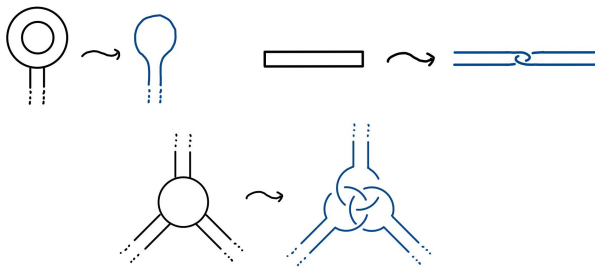
M : 連結なコンパクト有向3次元多様体.

次の連結なコンパクト曲面 $G \subset M$ をグラフクラスパーと呼ぶ.

- G は部品 (円板, 長方形 (バンド), アニュラス) からなる.
- バンドは円板同士, アニュラスと円板, のいずれかを結ぶ.
- 円板は3つのバンドに接する. アニュラスは1つのバンドに接する.



次のように曲面 G を枠付き絡み目 $L(G) \subset M$ に変える.



Dehn 手術により $M_{L(G)}$ を得る.

以上の操作を, グラフクラスパー G に沿うクラスパー手術と呼ぶ.

グラフクラスパー G の次数を, 円板の個数として定める.

Y 降下列

定義 (Y_n 同値)

$M, N \in \mathcal{IC}$.

同値関係 $M \sim_{Y_n} N$ を次で定める.

$\deg G_i = n$ である disjoint なグラフクラスパー $\{G_i\}_{i=1}^l$ が存在して,
 $M_{L\left(\coprod_{i=1}^l G_i\right)} \cong N$.

部分モノイド $Y_n \mathcal{IC}$

$Y_n \mathcal{IC} = \{M \in \mathcal{IC} \mid M \sim_{Y_n} \Sigma \times [-1, 1]\}$ とおくと,
 $\mathcal{IC}$ の部分モノイドをなす.

$$\mathcal{IC} = Y_1 \mathcal{IC} \supset Y_2 \mathcal{IC} \supset Y_3 \mathcal{IC} \supset \cdots$$

さらに $\iota: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{IC}$ について, $\iota(\mathcal{I}(n)) \subset Y_n \mathcal{IC}$.

定理 [Massuyeau-Meilhan]

- ① $g \geq 3$ のとき, $Y_1\mathcal{IC}/Y_2 \cong \mathcal{I}/\mathcal{I}(2)$,
- ② $Y_2\mathcal{IC}/Y_3 \cong \mathcal{A}_2^c$ (torsion-free).

定理 [野崎-鈴木-S]

$H = H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ について,
 H の生成する自由 Lie 代数を L ,
 $D_3 = \text{Ker}(H \otimes L_4 \rightarrow L_5)$ とおく.

- ① $Y_3\mathcal{IC}/Y_4 \cong (L_3 \oplus S^2H) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus (D_3 \oplus \Lambda^3H)$,
- ② $Y_4\mathcal{IC}/Y_5 \cong \mathcal{A}_4^c$ (torsion-free) .

最近の計算で, $\text{tor}(Y_6\mathcal{IC}/Y_7) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^r$ がわかっている.

5. 主定理

補題 [Cheptea-葉廣-Massuyeau]

$n \geq 1$.

$M \sim_{Y_{n+1}} N$ のとき, LMO 関手の n 次部分について,

$$\tilde{Z}_n^Y(M) = \tilde{Z}_n^Y(N) \in \mathcal{A}_n^Y \otimes \mathbb{Q}.$$

これより, $\tilde{Z}_n^Y: Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}$ が well-defined となる.

Cheptea-葉廣-Massuyeau はこれを記述した.

定理 [Cheptea-葉廣-Massuyeau]

$n \geq 1$.

$$\tilde{Z}_n^Y \circ \mathfrak{s}_n = \pm \text{id} \otimes 1: \mathcal{A}_n^c \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \xrightarrow{\tilde{Z}_n^Y} \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}.$$

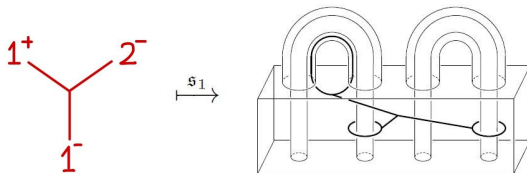
ここで, $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1}$ は次ページで紹介する全射準同型である.

手術写像 $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$

手術写像 [Goussarov, 葉廣]

次で定めるクラスパー G による $\Sigma \times [-1, 1]$ への手術として、
加群準同型 $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$ を定める。

- ヤコビ図の 3 価頂点の数だけ $\Sigma \times [-1, 1]$ 内に円板を配置する。
- ラベル i^+ (resp. i^-) をもつ 1 価頂点に対応して、
上面の i 番目の longitude (resp. 底面の i 番目の meridian) に
アニュラスを配置する。
- ヤコビ図の辺に対応して、円板やアニュラスをバンドで結ぶ。



Cheptea-葉廣-Massuyeau の定理より, LMO 関手の $(n+1)$ 次部分について,

$$\bar{z}_{n+1} = \tilde{Z}_{n+1}^Y \bmod \mathbb{Z}: Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が well-defined であることがわかる.

($n = 1$ については調整項が必要).

我々の主定理は彼らの定理の $(n + 1)$ 次版とみなすことができる.

主定理 [野崎-鈴木-S]

$\bar{z}_{n+1}: Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を記述した.

定義

$\delta: \mathcal{A}_n^c \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を

$$\delta(J) = \sum_{v \in U(J)} \delta_v(J) + \sum_{\substack{v \neq w \in U(J), \\ l(v)=l(w)}} \delta_{vw}(J)$$

と定める. ただし $U(J)$ はヤコビ図 J の 1 価頂点全体の集合.

$$\delta_v \left(\begin{array}{c} \textcolor{red}{l(v)} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \textcolor{red}{l(v)} \quad \textcolor{red}{l(v)} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \textcolor{red}{l(v)} \quad \textcolor{red}{l(v)^*} \\ \text{---} \end{array} \leftarrow \text{符号を変えたもの}$$

$$\delta_{vw} \left(\begin{array}{cc} \textcolor{red}{l(v)} & \textcolor{red}{l(w)} \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \textcolor{red}{l(v)} \\ \text{---} \end{array}$$

主定理 [野崎-鈴木-S]

$n \geq 1$ について, 次が可換.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_n^c & \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} & Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1} \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \bar{z}_{n+1} \\
 \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \frac{1}{2}} & \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
 \end{array}$$

$$\delta \left(\text{diagram with } 1^+ \text{ and } 2^+ \text{ labels} \right) = \underbrace{\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3}}_{=0} + \underbrace{\text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6}}_{=0} + \text{diagram 7} \in \mathcal{A}_2^c \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Remark

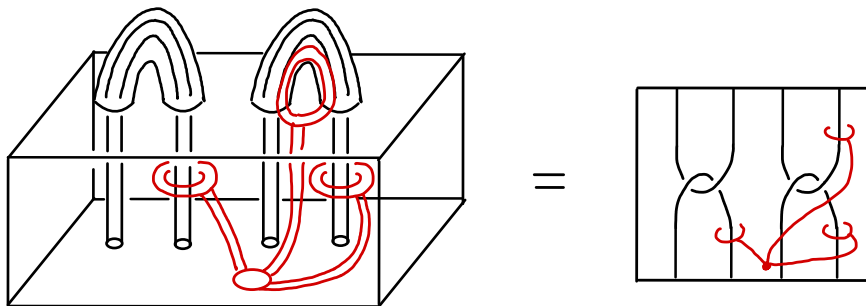
n が奇数のとき, $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ 上で $\bar{z}_{n+1}$ は非自明.

また既知の加群準同型とは異なるものであることがわかる.

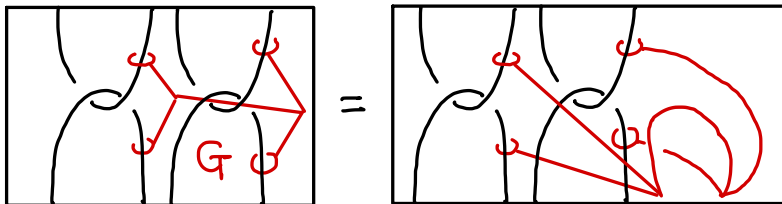
$\rightsquigarrow \mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ にトーション元がある.

主定理の証明

1. ホモロジーシリンダーを
tangle で表す.

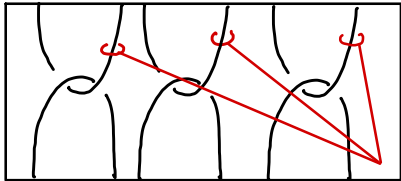


2. グラフクラスパーを
標準的な位置におく.

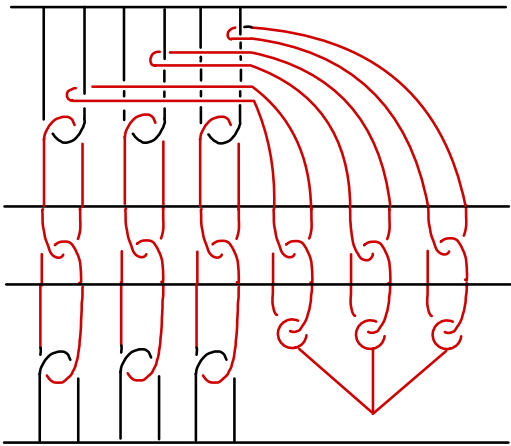


3. コボルディズムの接着を手術で表す.

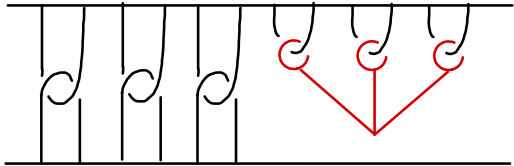
$M =$



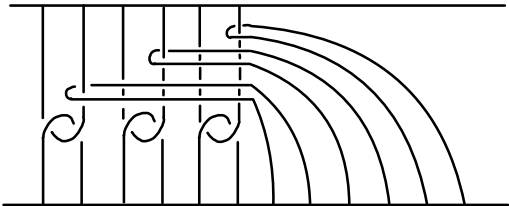
$=$



$=$



$\circ$



4. piecewise に LMO 関手を計算し, 積をとる.

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{Z}}^Y \left(\underbrace{\begin{array}{c} \text{Diagram with 3 cups} \end{array}} \right) &= \emptyset - \begin{array}{c} \text{Diagram with 3 downward arrows} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram with 3 upward arcs} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram with 3 downward arcs} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram with 3 upward arcs} \end{array} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram with 3 downward arrows} \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram with 3 downward arrows} \end{array} + (\text{ideg} \geq 3) , \end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathbb{Z}}^Y \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with 1 cup and 2 cups} \end{array} \right) = \emptyset - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram with 1 upward arrow and 2 downward arrows} \end{array} + (\text{ideg} \geq 2) ,$$

$$\widetilde{\mathbb{Z}}^Y \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with 1 cup and 2 cups} \end{array} \right) = \emptyset - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram with 1 upward arrow and 2 downward arrows} \end{array} + (\text{ideg} \geq 2) .$$