3 次元多様体に対するカラー-シャーレン理論及び関連する話題について

原　隆 (Takashi HARA)

大阪大学大学院理学研究科 数学専攻*

2013 年 5 月 31 日

概要

3 次元多様体の本質的曲面に関するカラー-シャーレン理論を振り返った後，その高次表現への拡張並びに数論的位相幾何学への応用について論ずる．尚，本稿の内容は部分的に北山貴裕 (東京大学大学院数理科学研究科) との共同研究に基づく．

本稿は 2013 年 3 月 16 日 — 18 日 に早稲田大学にて開催された『第 17 回早稲田整数論研究集会』に於ける著者の講演 “On CULLER-SHALEN theory for 3-manifolds and related topics” の報告書である．ものの〈かたち〉を調べる **トポロジー** *topology* という学問分野に於いて，「複雑な〈かたち〉をしたものを**より “単純” な〈かたち〉のもの** (パーツ) に分解する」という操作が重要である事は火を見るよりも明らかであろう．現に，最も基本的な分割とも言える三角形分割 triangulation (或いは 単体分割 simplicial decomposition) を皮切りに，胞体分割 cellular decomposition，パンツ分解 pants decomposition，ハンドル体分解 handle decomposition，ヘーゴール分解 HEEGAARD decomposition と，多様体の分解の概念だけでも枚挙に 暇 が無い程である．彼の ウィリアム・サーストン William THURSTON に依る **幾何化予想** *geometrisation conjecture* にせよ，3 次元多様体が 8 種類の “単純な” 幾何構造を持つパーツに分解出来る，と主張していたのであった[*1]．そんな多種多様な多様体の分解の中でも，此処では 3 次元多様体の **本質的曲面曲面に沿った分解** *decomposition along essential surfaces* を取り上げよう:

定義 0.1 (本質的曲面)**.** M をコンパクトで向き付け可能な連結既約 3 次元多様体とする．M に含まれる曲面 S (即ち 2 次元部分多様体) が **本質的曲面** *essential surface* であるとは S が以下の 4 条件を満たす事とする:

* 日本学術振興会特別研究員 (PD)　　課題番号: 23・200
`e-mail: t-hara@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp`

*1 幾何化予想から **ポワンカレ予想** *the* POINCARÉ *conjecture* が従うこと，並びに幾何化予想が 2003 年に グリゴリー・ペレルマン Grigori PERELMAN に依って証明されたことは周知の通りである．

(1) (非圧縮可能性 incompressibility) S の任意の連結成分 S_i に対し，自然な関手的準同型 $\pi_1(S_i) \to \pi_1(M)$ は単射.

(2) (両側襟付き bicollaredness) S の任意の連結成分は両側襟近傍を持つ; 即ち埋め込み $h\colon S \times [-1,1] \to M; (x,t) \mapsto h(x,t)$ で

  i) $h|_{t=0}$ は S の M への自然な包含写像であり，

  ii) $h(S \times [-1,1]) \cap \partial M = h(\partial S \times [-1,1])$

を満たすものが存在する[*2].

(3) (境界非平行性 non-peripherality) S の何れの連結成分も M の境界と平行でない; 即ち埋め込み $h'\colon S \times [-1,0] \to M; (x,t) \mapsto h'(x,t)$ で

  i) $h'|_{t=0}$ は S の M への自然な包含写像であり，

  ii) $h'(S \times [-1,0]) \cap \partial M = h'(S \times \{-1\} \cup \partial S \times [-1,0])$

を満たすようなものは存在しない.

(4) (非自明性 nontriviality) S は空集合でない．また，S の何れの連結成分も 2 次元球面 S^2 と同相でない.

但し 3 次元多様体 M への 2 次元球面 S^2 の任意の埋め込みが 3 次元閉球 D^3 の埋め込みへと連続に拡張されるときに M は **既約** *irreducible* であると定義する.

トポロジーの概念は直観的には捉えやすいものの，数学的に「きちんと」定義しようとすると繁雑となり却って理解しづらくなるものが多い．本質的曲面もまさにそのような概念の筆頭であろう．以下の 2 つの例は本質的曲面の中でも最も単純なものであり，本質的曲面という概念の直観的な理解の一助となるであろう.

例 1 (トーラス体, solid torus)．トーラス体，即ち “中身の詰まった浮き輪” (またはドーナツ) の場合，本質的曲面は所謂 **メリディアン円盤** *a meridian disc* である．メリディアン円盤に

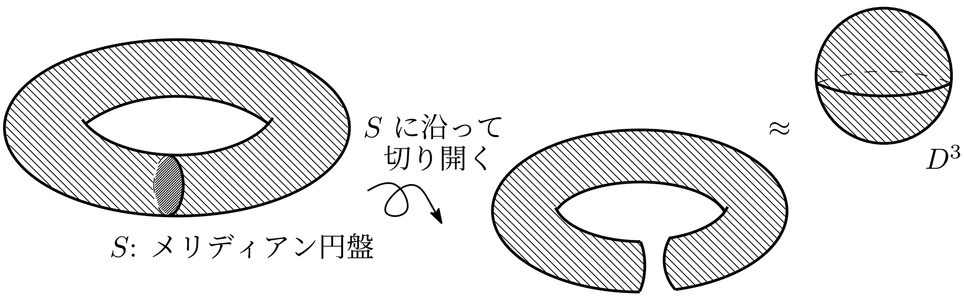


図 1　トーラス体

[*2] 特に両側襟近傍の存在から，S 自身も向き付け可能な曲面となる.

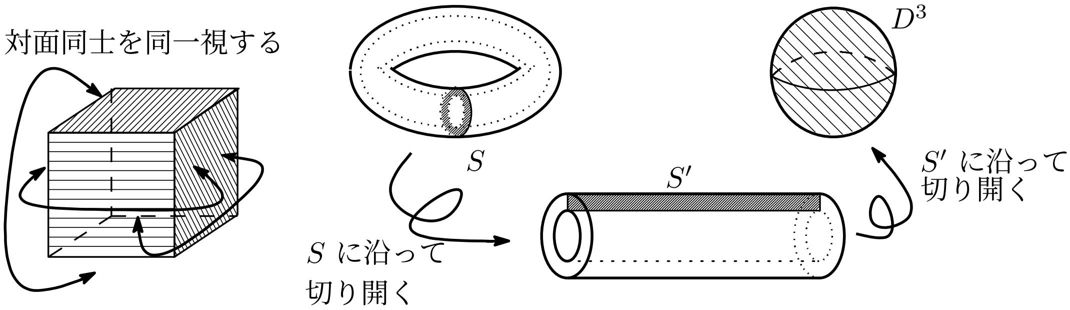


図 2　3 次元トーラス

沿ってトーラス体を “切り開く” と球体 a ball[*3] と同相となる．図 1 はトーラス体をメリディアン円盤に沿って切り開いた様子を表している．

例 2 (3 次元トーラス)．先のトーラス体の例では，本質的曲面の性質で最も重要な **非圧縮可能性** *incompressibility* の条件が自明であった (メリディアン円盤は可縮ゆえそれ自身の基本群が自明となるため)．ゆえにトーラス体の例は本質的曲面の例の中でも最も “つまらない” ものであると言えよう．そこで，本質的曲面自身の基本群が自明とならないようなものとして 3 **次元トーラス** *a 3-dimensional torus* T^3 の例を考えてみよう．

3 次元トーラスは “中身の詰まった立方体” の対面同士を (向きを保つように) 同一視したものである．3 次元トーラスは最早 3 次元ユークリッド空間内では実現出来ないが，それでも想像を働かせると “厚みを持ったトーラス” (これは立方体の 2 組の対面同士を貼り合わせたものである) の表面と裏面を適切な方法で貼り合わせたもの，と考えることが出来る．したがって同一視したどの対面も 3 次元トーラス内の本質的曲面となり，それは (2 次元) トーラス T^2 と同相となる (特に基本群は非自明である)．また，3 次元トーラスを本質的曲面に沿って次々と切り開いていくと，矢張り(やはり)最終的に球体と同相になることが観察出来る (図 2 にその様子を示した)．

注意 0.2. 本質的曲面を真に含むコンパクトかつ向き付け可能な連結既約 3 次元多様体は **ハーケン多様体** HAKEN *manifolds* と呼ばれる．ハーケン多様体を本質的曲面に沿って分割して得られる多様体は (非連結かもしれないが) 各連結成分が再びハーケン多様体となる．例 1, 2 でも観察されたように，一般にハーケン多様体は有限回の本質的曲面に沿った分割の後に有限個の 3 次元閉球と同相となることが知られている (ヴォルフガング・ハーケン Wolfgang HAKEN[*4])．有限個の 3 次元閉球に至るまでの一連の分割操作は **ハーケン階層** *a* HAKEN *hierarchy* と呼ば

[*3] 本稿では球体とは 3 **次元閉球体**，即(すなわ)ち $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$ と同相な 3 次元多様体を表す．

[*4] ケネス・アイラ・アッペル Kenneth Ira APPEL と共に 4 **色問題** *the four-color problem* を解決したことで有名なドイツ人数学者．スメイル，サーストン等の介入以前に，ポワンカレ予想の解決を巡ってギリシア人数学者クリストス・ディミトリオウ・パパキリアコプーロス Christos Dimitriou PAPAKYRIAKOPOULOS とライバルとして競い合ってきたというエピソードは (NHK の特集で扱われたこともあり) 良く知られているであろう．

れる．ハーケン多様体という多様体のクラスが重要視される理由の一つとして，ハーケン多様体の性質の一部がハーケン階層に関する帰納法に依って導かれることが挙げられるだろう．

注意 0.3. 3 次元多様体の本質的曲面は，曲面論に於ける **単純閉曲線** *simple closed curve, SCC* の概念の高次元拡張と見做(みな)す事も出来る．例えば向き付け可能なコンパクト閉曲面の写像類群は単純閉曲線に沿った **デーン捻り** Dehn *twist* で生成される等，単純閉曲線は曲面論 (またはリーマン面のトポロジー) に於いて非常に重要な役割を演じていた．このような観点からも，3 次元多様体論に於いて単純閉曲線の役割を担う本質的曲面という概念の重要性を感じ取る事が出来るだろう．

注意 0.4. 3 次元多様体の中には本質的曲面を含まないもの (**非ハーケン多様体** *non-*Haken *manifolds*) も勿論(もちろん)存在するが，一般に

> 位数無限の基本群を持つコンパクトで向き付け可能な既約 3 次元多様体は，
> 適当な有限被覆をとるとハーケン多様体となる

ことが予想されていた．この予想は **仮想ハーケン性予想** *the virtual* Haken *conjecture* と呼ばれているが，3 次元多様体論に於いてハーケン多様体という概念が非常に標準的なものであることを示唆する一つの証左としても捉えられよう．

尚(なお)，仮想ハーケン性予想は 2012 年に イアン・アゴール Ian Agol によって証明がアナウンスされた後，アゴール，ダニエル・グローヴス Daniel Groves，ジェイソン・マニング Jason Manning の連名で明文化されたものが現在アーカイヴ上に公開されている [AGM12].

斯様(かよう)に重要な研究対象である本質的曲面であるが，それではハーケン多様体に含まれる本質的曲面は一体どのようにして見つけ出せば良いのであろうか？ 1983 年，マーク・カラー Marc Culler と ピーター・シャーレン Peter B. Shalen は非常に **代数的かつ代数幾何的な手法** を駆使して組織的に本質的曲面を構成する手法を構築した [CS83]．本稿では先(ま)ずカラーとシャーレンに依る非常に卓越(たくえつ)した本質的曲面の構成法を [Sh02] に従って簡単に回顧(かいこ)し，その後関連する発展的な話題 (高次表現への拡張，位相的数論幾何学への応用に向けた取組み) に関して，著者の最近の研究及び共同研究に依り得られた成果を中心に紹介する．

目次

§ 1　古典的カラー-シャーレン理論

本節では古典的な設定でのカラー-シャーレン理論 [CS83] について解説する．トポロジーの専門家以外にも分かり易いように書かれたカラー-シャーレン理論の日本語の解説記事は現時点ではまだ見当たらないように思われるので，この場を借りて少し丁寧に解説することを試みた．また，シャーレン自身に依る解説記事 [Sh02] もかなり詳細に執筆されているため，興味のある方は是非参照されたい[*5]．

カラー-シャーレン理論の骨格は基本群の ≪樹木≫ への非自明作用と本質的曲面の存在を関係づける **ストーリングス-エプシュタイン-ワルドハウゼンの理論** と，基本群の ≪樹木≫ への非自明作用を得るために導入される **指標多様体の幾何学** 並びに基本群の (ユニモジュラーな線型) 表現と ≪樹木≫ への作用を関連づける際に用いられる **ブリュアー-ティッツの理論** に依り形成される．以下，各段階の概要について順を追って解説しよう．

§1.1　基本群の ≪樹木≫ への作用と本質的曲面

「本質的曲面の構成」という純粋なトポロジーの問題は，**基本群の ≪樹木≫ への非自明な作用** を介して代数的 (或(ある)いは代数幾何的) な枠組みで扱うことが可能となることが，ジョン・ロバート・ストーリングス John Robert Stallings [St59, St71]，デイヴィッド・ベルナルド・アルペル・エプシュタイン David Bernard Alper Epstein [Ep61] 並びにフリードヘルム・ワルドハウゼン Friedhelm Waldhausen [Wald67] 等に依る古典的な結果から従う．本小節ではその大筋について解説しよう．

以下 M をコンパクトで向き付け可能な連結既約 3 次元多様体とし，$\pi_1(M)$ をその基本群とする[*6]．本稿では **グラフ** *a graph* と言う用語は 1 次元 CW 複体を指すものとし，連結かつ単連結なグラフを ≪**樹木**≫ *a tree* と呼ぶ．また，グラフの 0 胞体を **頂点** *a vertex*，1 胞体を **辺** *an edge* と呼ぶ．基本群 $\pi_1(M)$ の ≪樹木≫ T への作用が **逆転を含まない** *without inversion* と

[*5] [Sh02] では必要最低限の代数幾何学の知識や ≪樹木≫ の理論に関しても解説されているため，割と自己包括的に読み進めることが出来るのではないかと思う．

[*6] 連結性から M の基本群 $\pi_1(M, x)$ は基点 x の取り方に依らず同型となるので，以下基本群の表記から基点を省略して $\pi_1(M)$ と表す．

は，或る辺を固定しその端点を入れ替えるような $\pi_1(M)$ の元が存在しないことを指し，作用が **非自明** *nontrivial* であるとは各頂点及び辺に対する固定部分群が $\pi_1(M)$ 全体にならないことを指すものとする．以下では基本群の ≪樹木≫ への非自明な作用としては逆転を含まないものしか考えないので，単に「基本群の非自明な作用」と表記した際には暗に「逆転を含まない非自明な作用」を指すものとする．

さて，基本群 $\pi_1(M)$ の ≪樹木≫ $\mathcal{T}$ への (逆転を含まない) 非自明な作用が与えられたとしよう．先ず M の有限三角形分割をとり，普遍被覆空間 $\tilde{M}$ にその三角形分割を $\pi_1(M)$-同変に持ち上げる．このとき $\pi_1(M)$-同変な単体的写像 $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \mathcal{T}$ が以下のようにして構成出来る:

ステップ 1. $\tilde{M}$ の 0 骨格への $\pi_1(M)$ の作用に関する商集合 $\tilde{M}^{(0)}/\pi_1(M)$ の代表系 $\mathcal{S}^{(0)}$ から $\mathcal{T}$ の頂点集合 $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ への任意の射を考える．

ステップ 2. $\pi_1(M)$-同変に拡張することに依り，$\pi_1(M)$-同変写像 $\tilde{f}^{(0)}\colon \tilde{M}^{(0)} \to \mathcal{T}^{(0)}$ を得る．

ステップ 3. ≪樹木≫ $\mathcal{T}$ の可縮性から，延長補題 ([Hat02, Lemma 4.7] 参照) に拠り $\tilde{f}^{(0)}$ は連続写像 $\tilde{f}'\colon \tilde{M} \to \mathcal{T}$ に延長される．

ステップ 4. 単体複体対に対する単体近似定理 ([服部 02, 定理 4.3] 参照) を用いて $\tilde{f}'$ を近似することに拠り，(適当に $\tilde{M}$ の重心細分を繰り返すことで) $\pi_1(M)$-同変な単体的写像 $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \mathcal{T}$ が得られる[*7]．

構成から容易に分かるように，斯様な $\tilde{f}$ は全く一意的ではなく，$\tilde{f}$ の選び方にはかなりの任意性が生ずることに注意しておく (逆説的に，$\tilde{f}$ の選び方に任意性が生ずるが故に後程「S が本質的になるように $\tilde{f}$ を取り替える」という操作が可能となる，とも言えよう)．

$\pi_1(M)$-同変写像 $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \mathcal{T}$ の商を考えることに依り，M から **商グラフ** *the quotient graph* $\mathcal{T}/\pi_1(M)$ への単体的写像 $f\colon M \to \mathcal{T}/\pi_1(M)$ が得られる．商グラフ $\mathcal{T}/\pi_1(M)$ の各辺の **中点** *midpoints* を集めた集合 E を f で引き戻したもの S は M 内の曲面を定義するが，$\mathcal{T}$ への $\pi_1(M)$ の作用の非自明性から ($\tilde{f}$ を適当に取り替えると) S が本質的となることが従う．この箇所はトポロジー的な操作に終始するため，詳細は割愛させていただきたい．図 3 は，上記の手順に基づいた本質的曲面の構成方法を模式的に図示したものである．

注意 1.1. 商グラフ $\mathcal{T}/\pi_1(M)$ の各頂点または辺 c に対して，$\pi_1(M)$ の作用に関する c の固定部分群 $\pi_1(M)_c$ を対応させる操作を $\mathcal{G}$ で表すとき[*8]，組 $(\mathcal{T}/\pi_1(M), \mathcal{G})$ は所謂 **「群のグラフ」** *a graph of groups* の構造を持つ．ハイマン・バス Hyman Bass と ジャン-ピエール・セール Jean-Pierre Serre が創始した **グラフの基本群の理論** [Ser77] に拠ると，「群のグラフ」に対してグラフの基本群 $\pi_1(\mathcal{T}/\pi_1(M), \mathcal{G})$ が定まって $\pi_1(M)$ と自然に同型となる．その

[*7] 細かい技術的な注意ではあるが，単体近似定理は 有限 単体複体に対して適用可能な定理なので，各単体の $\pi_1(M)$ 作用による代表系 (これは定義より有限集合) に対して単体近似定理を適用する必要がある．詳細は [Sh02, Section 2.1] 参照．

[*8] より精確には，グラフ $\mathcal{T}/\pi_1(M)$ を「頂点及び辺を対象とし，各辺からその端点に向けてそれぞれ唯一つずつ射が存在する」ような圏と見做すとき，$\mathcal{G}\colon \mathcal{T}/\pi_1(M) \to \mathscr{G}r$ は共変関手となる．

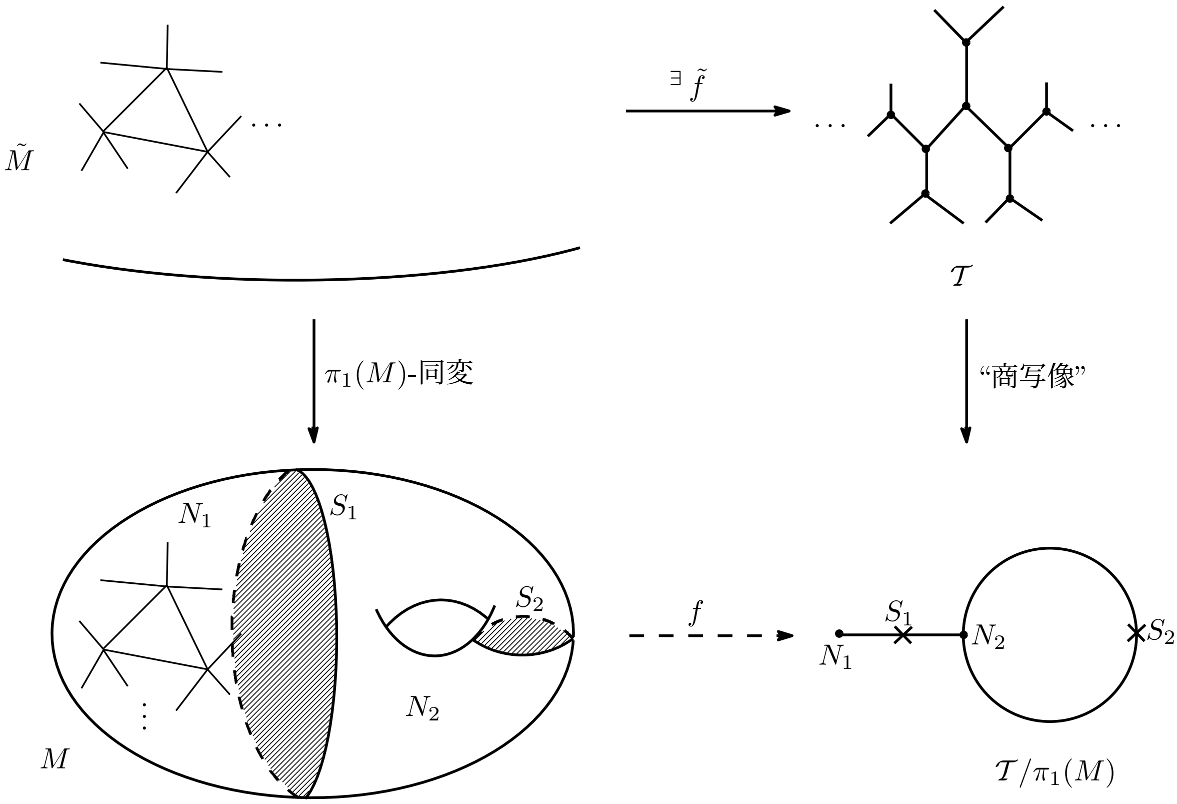


図 3　本質的曲面の構成

一方で斯様(かよう)な同型を与えることは基本群 $\pi_1(M)$ の **融合和** *amalgamated sums* 及び *HNN* **拡大** HIGMAN-NEUMAN-NEUMAN *extensions* に依る分解 splittings を与えることに相当するのであった．ストーリングス，エプシュタイン，ワルドハウゼン等は元々基本群 $\pi_1(M)$ の分解の様子を考察することで M に含まれる本質的曲面を研究していた．本小節ではより幾何的な観点から本質的曲面の構成法を解説したが，本小節で解説した内容はバス-セールの理論に拠りストーリングス等の理論と本質的に等価となっている．尚(なお)，バス-セール理論については [Ser77] に詳しいので是非参照されたい．

§ 1.2　指標多様体とブリュアー-ティッツの ≪樹木≫

ストーリングス-エプシュタイン-ワルドハウゼンの理論に依り，基本群 $\pi_1(M)$ の ≪樹木≫ への (逆転を含まない) 非自明な作用が与えられれば，その作用に付随して M に含まれる本質的曲面を構成出来るが，3 次元多様体の基本群 $\pi_1(M)$ と ≪樹木≫ の間には一般には何ら関係がないため，$\pi_1(M)$ が非自明に作用する ≪樹木≫ を構成するのは実はかなり難しい問題である[*9]．

[*9] 敢(あ)えて整数論側での類似の現象を追究するならば，この問題の難しさは非自明なガロワ表現の構成の難しさに近いものであると言えよう．実際，非自明なガロワ表現の構成はグロタンディークに依りエタール・コホモロジー論が導入されるまで大変な難問であった．

カラーとシャーレンは **指標多様体** *the character variety* と呼ばれる $\pi_1(M)$ の表現のモジュライ空間を導入し，その幾何学的性質から $\pi_1(M)$ の ≪樹木≫ への非自明な作用を得ることに成功した．以下ではその概略を解説しよう．

先ず M のコンパクト性に拠って基本群 $\pi_1(M)$ が有限表示群となるので，$\pi_1(M)$ の $SL_2(\mathbb{C})$-表現全体 $R(\pi_1(M))_{SL(2)} := \mathrm{Hom}(\pi_1(M), SL_2(\mathbb{C}))$ は $\mathbb{C}$ 上のアファイン代数多様体の構造を持つ (詳細は [CS83, Section 1.1] を参照)．$R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ を $\pi_1(M)$ の $SL(2)$-**表現多様体** *the* $SL(2)$*-representation variety* と呼ぶ．$R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ には共役作用により代数群 $SL(2)_{/\mathbb{C}}$ が作用する．その作用に関する幾何学的不変式論商 geometric invariant theoretical quotient, GIT-quotient を $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ で表し，$\pi_1(M)$ の $SL(2)$-**指標多様体** *the* $SL(2)$*-character variety* と呼ぶ ($X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ も $\mathbb{C}$ 上のアファイン代数多様体となる)．それぞれの複素有理点は

$$\begin{aligned} R(\pi_1(M))_{SL(2)}(\mathbb{C}) &= \{ \text{表現 } \rho\colon \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})\} \\ X(\pi_1(M))_{SL(2)}(\mathbb{C}) &= \{\chi_\rho := \mathrm{tr}\,\rho \mid \text{表現 } \rho\colon \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C}) \text{ の指標 }\} \\ &\text{“=”}\ \{[\rho] \mid \text{表現 } \rho\colon \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C}) \text{ の共役類 }\}^{*10} \end{aligned}$$

であり，$R(\pi_1(M))_{SL(2)}$, $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ はまさに **基本群** $\pi_1(M)$ **の** $SL(2)$-**表現のモジュライ空間** に他ならない．代数幾何学的な議論に不慣れな方は，$R(\pi_1(M))_{SL(2)}$, $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ は上式の右辺の集合に巧く代数多様体構造を入れて代数幾何学的に扱えるようにしたものであると考えていただいても本稿を読む分には全く差し支えない．尚，構成から自然な射影 $\mathrm{pr}\colon R(\pi_1(M))_{SL(2)} \to X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ が存在する事に注意しておく．

表現多様体 $R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ のアファイン座標環を $A(R_1(\pi_1(M))_{SL(2)})$ で表すとき, $\pi_1(M)$ の **トートロジー的表現** *the tautological representation* $\rho_{\mathrm{taut}}\colon \pi_1(M) \to SL_2(A(R(\pi_1(M))_{SL(2)}))$ が

$$(\rho_{\mathrm{taut}}(\gamma))(y) = \rho_y(\gamma) \quad \text{for } \gamma \in \pi_1(M), \quad y \in R(\pi_1(M))_{SL(2)}(\mathbb{C})$$

に依り定まる．但し $\rho_y\colon \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})$ は $R_1(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の複素有理点 y に対応する表現である．基本群 $\pi_1(M)$ の各元 γ に対して $R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ 上の正則関数 (即ち座標環 $A(R(\pi_1(M))_{SL(2)})$ の元) I_γ を $I_\gamma = \mathrm{tr}\,\rho_{\mathrm{taut}}(\gamma)$ で定める; より具体的には, I_γ は $R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の閉点 y に対して $I_\gamma(y) = \mathrm{tr}\ \rho_y(\gamma) = \chi_{\rho_y}(\gamma)$ で定まる関数である．さらに指標多様体の幾何学的不変式論商に依る定義から， I_γ は $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ 上の正則関数と見做すことも出来る[*11]．ここでは I_γ を γ に於ける **値写像** *the evaluation map* と呼ぼう．

[*10] 単なる集合論的商ではなく幾何学的不変式論商を取っているので，$X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の複素有理点全体， 即ち $\pi_1(M)$ の指標全体の集合 (左辺) と表現の共役類全体の集合 (右辺) との間には厳密には (特に可約表現に対応する成分で) 若干のずれが生じる．

[*11] つまり $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の複素有理点 x に対し, その $R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ への持ち上げを一つ取って y と表す時, I_γ を $I_\gamma(x) := \mathrm{tr}\,\rho_y(\gamma) = \chi_{\rho_y(\gamma)}$ で定めれば良い．これは持ち上げ y の選び方に依らない $X_1(\pi_1(M))_{SL(2)}$ 上の正則関数となる．

補題 1.2 ([CS83, Proposition 1.4.1]). 基本群 $\pi_1(M)$ が $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ で生成されるとき，指標多様体 $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の正則関数環 (或(ある)いはアファイン座標環) は

$$\{I_\gamma \mid \gamma = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_k},\ 1 \leq k \leq s,\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$

で生成される (特に $2^s - 1$ 個の元で生成される $\mathbb{C}$ 上の有限生成代数となる).

証明は **トレース恒等式** *the trace identity*

$$(\mathrm{tr}\ A)(\mathrm{tr}\ B) = \mathrm{tr}\ AB + \mathrm{tr}\ AB^{-1} \qquad \text{for } A,\ B \in SL_2(\mathbb{C})$$

に根ざした初等的な線形代数の計算に終始し，格段難しいものではない．それにも拘(かかわ)らず「指標多様体の正則関数環が値写像で生成される」という事実自体は，後にカラー-シャーレン理論の基本補題 (補題 1.4) を証明する際に非常に重要な役割を演ずる．

ここで複素曲線に纏(まつ)わる諸概念のうち本稿で用いられる代表的なものを導入しておこう．代数曲線論の一般論については [Mum76] 等を参照されたい．複素アファイン曲線 E に対してその (1 つの) 射影完備化を $\bar{E}$ で表す．このとき $\bar{E}$ は射影曲線となり，$\bar{E}$ の特異点をブローアップに依り解消したものを $\tilde{E}$ とすると $\tilde{E}$ は (双有理同値の差を除いて一意的に定まる) E の **滑らかな射影的モデル** *the smooth projective model* となる．ブローアップ写像 $\phi\colon \tilde{E} \to \bar{E}$ はこの場合 ($\tilde{E}$ が滑らかな曲線で $\bar{E}$ が射影的であることから) 正則となることに注意しておく ([Mum76, Proposition 7.1] 参照).

定義 1.3 (理想点と通常点). 複素アファイン曲線 E に対し，$\phi\colon \tilde{E} \to \bar{E}$ を E の射影完備化 $\bar{E}$ のブローアップに依る特異点解消とする．
曲線 $\tilde{E}$ の閉点 x が **理想点** *an ideal point* であるとは，$\phi(x)$ が $\bar{E} \setminus E$ に含まれることを指すこととする．理想点でない $\tilde{E}$ の閉点は **通常点** *an ordinary point* と呼ばれる．

直観的な用語を用いるならば，理想点は単に "無限遠点" を表していることに他ならない．このとき代数曲線論の一般論に拠(よ)って，複素アファイン曲線の正則写像 $f\colon E_1 \to E_2$ が誘導する正則写像 $\tilde{f}\colon \tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2$ で $\tilde{E}_2$ の理想点を引き戻したものは $\tilde{E}_1$ の理想点の有限集合となる．したがって特に理想点の概念が E の射影完備化 $\bar{E}$ の取り方に依らないことが従う[*12].

以上の準備の下で，指標多様体 $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ に含まれる曲線 C を 1 つ採ろう．すると C の逆像 $\mathrm{pr}^{-1}(C) \subset R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ に含まれる曲線 D で， pr の制限 $\mathrm{pr}|_D$ が定値写像とならないものが存在する．射影 $\mathrm{pr}|_D$ は滑らかな射影的モデル上に正則写像 $\widetilde{\mathrm{pr}|_D}\colon \tilde{D} \to \tilde{C}$ を誘導することに注意しよう．トートロジー的表現 ρ_{taut} と $D \subset R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ から誘導される座標環の全射 $A(R(\pi_1(M))_{SL(2)}) \twoheadrightarrow A(D)$ を合成することで **曲線 D に対するトートロジー的表現** $\rho_{D,\mathrm{taut}}\colon \pi_1(M) \to SL_2(A(D))$ が得られるが，これは表現 $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}\colon \pi_1(M) \to SL_2(K(D))$ に自然に拡張される (ここで $K(D) \cong K(\tilde{D})$ は $\tilde{D}$ の有理関数体)．この表現 $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}$ を ≪樹

[*12] 恒等写像 $\mathrm{id}\colon E \to E$ に上記の議論を適用せよ．

木≫ への作用に結びつけるために，D の閉点 y に対応する **ブリュアー-ティッツの ≪樹木≫** *the* Bruhat-Tits *tree* を導入しよう．曲線 $\tilde{D}$ の関数体 $K(D)$ の元 f に対し，f の y での位数 $v_y(f)$ を対応させる関数 $v_y\colon K(D) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を考えることで，$K_y := (K(D), v_y)$ は離散付値体 a discrete valuation field となる．その付値環を $\mathcal{O}_y$ と表し，さらに一意化元 ϖ_y を固定する．離散付値体 K_y 上定義された代数群 $SL(2)_{/K_y}$ に対し，以下の頂点集合及び辺集合に依って与えられるグラフ $\mathcal{T}_y$ を考える:

頂点: ベクトル空間 $V_0 := K_y^{\oplus 2}$ の $\mathcal{O}_y$-格子の相似類 homothety classes 全体; 即(すなわ)ち，V_0 の階数 2 の自由 $\mathcal{O}_y$-部分加群 L で $L \otimes_{\mathcal{O}_y} K_y = V_0$ となるもののうち，$K_y^\times$ のスカラー倍作用で移りあうものを同一視した同値類 $[L]$ 全体.

辺: 頂点 v_1, v_2 は，それぞれの対応する $\mathcal{O}_y$-格子の相似類の代表元 L_1, L_2 で

$$\varpi_y L_2 \subset L_1 \subset L_2 \text{ または } \varpi_y L_1 \subset L_2 \subset L_1$$

を満たすものが存在するときに辺で結ばれる (または **隣接する** *adjacent*) と約束する.

この様にして定まるグラフ $\mathcal{T}_y$ は ≪樹木≫ となることが知られている ([Ser77, Chapter II, Theorem 1] 参照)．これを $SL(2)_{/K_y}$ に付随するブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ と呼ぶ．$\mathcal{T}_y$ には「自然に」$SL_2(K_y)$ が作用する; つまり，$\mathcal{O}_y$-格子 L の $\mathcal{O}_y$ 基底を e_1, e_2 とするとき

$$g[L] := [gL], \quad gL = \mathcal{O}_y g e_1 \oplus \mathcal{O}_y g e_2 \subseteq V_0$$

に依って $\mathcal{T}_y$ の頂点 (即(すなわ)ち格子の相似類) $[L]$ に対する $SL_2(K_y)$ の元 g の作用が定まる (この作用は逆転を含まないことが比較的容易に分かる)．したがって，$\tilde{D}$ に付随するトートロジー的表現 $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}\colon \pi_1(M) \to SL_2(K(D)) = SL_2(K_y)$ に $SL_2(K_y)$ の $\mathcal{T}_y$ への自然な作用を合成することで，**基本群 $\pi_1(M)$ のブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ への作用** $\pi_1(M) \curvearrowright \mathcal{T}_y$ が得られる.

§1.3 指標多様体の理想点と基本群の作用の非自明性

引き続き $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ に含まれる曲線 C 及び $R(\pi_1(M))_{SL(2)}$ への持ち上げ D を採り[*13]，正則写像 $\widetilde{\mathrm{pr}|_D}\colon \tilde{D} \to \tilde{C}$ を考える．値写像に関する以下の補題がカラー-シャーレン理論の要である (ここでは値写像 I_γ (の C への制限) を自然に $\tilde{C}$ 上の有理関数と見做(みな)す).

補題 1.4 (カラー-シャーレン理論の基本補題)**.** 曲線 $\tilde{C}$ の閉点 x 及びその $\tilde{D}$ への持ち上げ y に対し，離散付値体 $K_y = (K(D), v_y)$ に付随するブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ を $\mathcal{T}_y$ で表す．また γ を基本群 $\pi_1(M)$ の元とする．このとき以下は同値.

(1) $I_\gamma(x)$ は複素数値をとる．即(すなわ)ち I_γ は x で正則 (極を持たない).
(2) 1.2 節で導入された $\pi_1(M)$ の $\mathcal{T}_y$ への作用の下で，γ の作用で固定される $\mathcal{T}_y$ の頂点が存在する.

[*13] 非ハーケン多様体 M に対しては $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の各既約成分が 0 次元となるため，この段階でカラーとシャーレンの手法は頓挫(とんざ)する.

補題 1.4 の証明は本小節の最後で与える．補題 1.4 に拠り，<u>**理想点に付随する**</u> **ブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ に対する** $\pi_1(M)$ **の作用が非自明となる** ことが直ちに従う．以下，補題 1.4 を $\tilde{x} \in \tilde{C}$ 及び $\tilde{y} \in \tilde{D}$ が理想点の場合に適用して，作用 $\pi_1(M) \curvearrowright \mathcal{T}_{\tilde{y}}$ が非自明となることを示そう; もしこの作用が自明である，即ち或る $\mathcal{T}_{\tilde{y}}$ の頂点 v が存在して $\pi_1(M)_v = \pi_1(M)$ が成り立つと仮定すると，補題 1.4 の (2) $\Rightarrow$ (1) に依って

(♣)　<u>任意の</u> $\pi_1(M)$ の元 γ に対して $I_\gamma(\tilde{x})$ は $\mathbb{C}$ の元

が成り立つ．一方で $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の座標環は有限個の値関数 $I_{\gamma_1}, \ldots, I_{\gamma_t}$ で生成されることを思い出そう (補題 1.2)．このとき (♣) に拠り各 $1 \le j \le t$ に対して複素数 α_j が存在して $I_{\gamma_j}(\tilde{x}) = \alpha_j$ が成り立つので，点 $\tilde{x}$ は $(I_{\gamma_1} - \alpha_1, \ldots, I_{\gamma_t} - \alpha_t)$ で生成される $A(C)$ の極大イデアルに対応する点となる: 特に $\tilde{x} \in C$．これは $\tilde{x}$ が理想点であることと矛盾する．斯くして作用 $\pi_1(M) \curvearrowright \mathcal{T}_{\tilde{y}}$ の非自明性が導かれる．

以上の観察から <u>カラー-シャーレン理論の基本原理</u>，即ち (標語的に言えば)

$$\boxed{\text{指標多様体 } X(\pi_1(M))_{SL(2)} \text{ の各理想点に付随して本質的曲面が構成出来る}}$$

ことが導かれる．

補題 1.4 の証明. 始めに I_γ の x に於ける正則性が以下のように言い換えられることに注意しよう:

$$\begin{aligned} I_\gamma(x) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow v_x(I_\gamma) \ge 0 \qquad &\Leftrightarrow v_y(\operatorname{tr} \rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma)) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tr} \rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma) \in \mathcal{O}_y. \end{aligned}$$

先ず主張 (2) が成り立っているとすると，$\mathcal{T}_y$ への $\pi_1(M)$ の作用の定義から $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma)$ は $SL_2(\mathcal{O}_y)$ の共役に含まれる: 特に $\operatorname{tr} \rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma) \in \mathcal{O}_y$．したがって主張 (1) が従う．

逆に主張 (1) が成り立っているとしよう．退化している場合，即ち $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma) = \pm I_2$ (I_2 は 2 次の単位行列) が成り立つ場合は，$\pi_1(M)$ の $\mathcal{T}_y$ への作用は自明となるので $\mathcal{T}_y$ の任意の頂点が主張 (2) を満たす．非退化な場合，即ち $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma) \neq \pm I_2$ が成り立つ場合は，$V_0 = K_y^{\oplus 2}$ の非零ベクトル e で $f := \rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma)(e)$ と K_y 上互いに線型独立となるものが取れる．基底 $\{e, f\}$ に関して $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma)$ を行列表示したものは

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \quad b,\ d \in K_y$$

となるので，特に

$$b = -\det \rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma) = -1 \quad \text{及び} \quad d = \operatorname{tr} \rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma) \in \mathcal{O}_y \quad (\text{主張 (1) より})$$

が分かる．つまり $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}(\gamma)$ は $SL_2(\mathcal{O}_y)$ の共役に含まれるので，再び作用の定義から γ が $\mathcal{T}_y$ の或る頂点を固定することが従う．　□

§ 2　高次元表現への拡張

古典的なカラー-シャーレン理論では基本群 $\pi_1(M)$ のブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ への非自明な作用を考察していたが，ブリュアー-ティッツの理論はかなり一般的な状況で確立されているため，例えば **ブリュアー-ティッツの理論を用いてカラー-シャーレン理論を高次表現に対し拡張出来ないか？** という (少なくとも代数学の研究者にとっては) 非常に素朴な疑問が自然に生ずるであろう．実際，ブリュアー-ティッツの ≪建物≫ への非自明な作用を高次指標多様体の理想点から構成することが出来て，結果として多様体 M に含まれる或る種の **分岐曲面** *branched surfaces* の情報が得られることを以下で解説する．尚，本節の内容は 北山 貴裕 (東京大学大学院数理科学研究科) との共同研究 [HK13] に基づく (トポロジーの観点からの解説として [北山 13] も参照されたい).

§ 2.1　本質的三つ又分岐曲面

本小節では高次指標多様体を考察することで得られる **三つ又分岐曲面** *a tribranched surface* (或いは Y **の字分岐曲面** *a Y-branched surface*)[14] の概念を導入しよう．

定義 2.1 (三つ又分岐曲面)**.** コンパクトで向き付け可能な連結既約 3 次元多様体 M の部分空間 Σ が **三つ又分岐曲面** *a tribranched surface* (或いは Y **の字分岐曲面** *a Y-branched surface*) であるとは，Σ が以下の条件を満たすこととする:

(i) M の或る単体分割に関して Σ は 2 次元単体部分複体となる．

(ii) 対 (M, Σ) は局所的に $(\bar{\mathbb{H}}, Y \times [0, +\infty))$ と同相．但し $\bar{\mathbb{H}}$ 及び Y は以下で定義される:

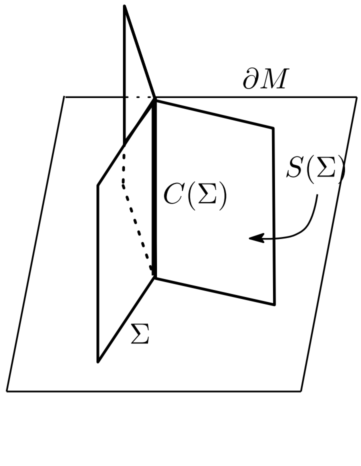
$$\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{C} \times [0, +\infty), \quad Y := \{re^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{C} \mid r \geq 0, \theta = 0 \text{ または } \pm\frac{\pi}{3}\}.$$

Σ の分岐点集合 (即ち局所的に $\{0\} \times [0, +\infty) \subset Y \times [0, +\infty)$ と同相となる部分) を $C(\Sigma)$，Σ から $C(\Sigma)$ の十分小さい正則近傍を除いて得られる曲面を $S(\Sigma)$，Σ の正則近傍の M に於ける補空間を $M(\Sigma)$ で表す．

(iii) 分岐集合 $C(\Sigma)$ の十分小さな正則近傍と Σ との共通部分は $Y \times C(\Sigma)$ と同相.

(iv) $S(\Sigma)$ は向き付け可能.

三つ又分岐曲面を図示すると，局所的には大体右図の様になる (Σ は最早多様体とはならないため，定義が大分繁雑になっている)．条件 (iii) は分岐集合 $C(\Sigma)$ に「捩れが無い」ことを保障するために課されたものであり，条件 (iii), (iv) は本質的曲面の条



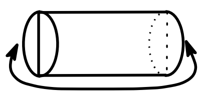
[14] 用語については現在検討中.

件に於ける「両側襟近傍の存在」に対応するものである．尚，トポロジーでは分岐集合の周辺で “平滑化” smoothing したようなものとして **分岐曲面** *branched surfaces* という概念が既に導入されているが，我々の結果に於いては分岐集合 $C(\Sigma)$ の周辺での滑らかさは一切仮定しないため，[HK13] では意図的に branched surfaces という用語を避けている．

定義 2.2 (本質的三つ又分岐曲面)**.** コンパクトで向き付け可能な連結既約 3 次元多様体 M の三つ又分岐曲面 Σ が **本質的** *essential* であるとは，以下の条件を満たすこととする:

(a) $C(\Sigma)$ の連結成分 C 及び $S(\Sigma)$ の連結成分 S に対し，関手的準同型 $\pi_1(C) \to \pi_1(S)$ が存在するならば単射となる．
(b) $S(\Sigma)$ の連結成分 S 及び $M(\Sigma)$ の連結成分 N に対し，関手的準同型 $\pi_1(S) \to \pi_1(N)$ が存在するならば単射となる．
(c) $M(\Sigma)$ の各連結成分 N に対し，包含写像が誘導する準同型写像 $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ は全射でない．
(d) Σ の各連結成分は M 内の球体に含まれない．また Σ の各連結成分は境界 ∂M の襟近傍に含まれない．

注意 2.3. 本質的三つ又分岐曲面の条件のうち，(a) と (b) は圧縮不可能性の概念の自然な拡張であり，(d) は境界非平行性並びに非自明性に対応する条件である．また，条件 (c) は「中に仕切りがあるトーラス」(右図参照) のような “つまらない曲面” を排除するために課された条件である (分岐の無い本質的曲面の場合には条件 (c) は自明に満たされる)．



同一視

注意 2.4. 本質的曲面 (定義 0.1) は分岐集合が空集合であるような本質的三つ又分岐曲面と見做すことが出来るため，本質的三つ又分岐曲面の概念は本質的曲面の概念の拡張となっている．

§2.2　≪樹木≫ の “高次元化” —ブリュアー-ティッツの ≪建物≫

ジャック・ティッツ Jacques TITS が導入した ≪**建物**≫ *buildings* の概念は，組み合わせ論的にも幾何学的にも大変良い性質を持つ計量空間であり，組み合わせ論，リー代数論，幾何学的群論，整数論等様々な分野で広く用いられている．フランソワ・ブリュアー François BRUHAT と ジャック・ティッツ Jacques TITS は，実数体上の代数群に付随するリーマン対称空間の類似物として，特に付値体上定義された簡約代数群に対しその代数群が推移的に作用するようなユークリッド型の ≪建物≫ を構成した [BT72]．以下では本稿で必要な特殊線型群 $SL(n)$ の場合に限ってブリュアー-ティッツの ≪建物≫ の定義を紹介し，ブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ の自然な一般化となっていることを確認しよう．尚，≪建物≫ の理論の入門的なテキスト

として [AB08] (の主に前半部) も参照されたい.

先ずはティッツに依る ≪建物≫ の公理を紹介しよう. (抽象) 単体複体 Δ とその部分複体の族 $\mathcal{A}$ の組 $\mathcal{B} = (\Delta, \mathcal{A})$ が ≪**建物**≫ *a building* であるとは, 以下の公理を満たすこととする.

(B1) Δ の (または任意の $\mathcal{A}$ の元 A に属する) 各単体は極大単体 (の境界) に含まれる. さらに Δ の (または各 $A \in \mathcal{A}$ の) 極大単体は有限次元で, 次元は全て $r-1$ となる.

(B2) 各 $A \in \mathcal{A}$ は連結である; 即ち A の任意の極大単体 C, D に対し, C と D を繋ぐ様な互いに隣接する A の極大単体の列が取れる[*15].

(B3) 任意の Δ の (または $A \in \mathcal{A}$ の) $(r-2)$ 次元単体は, 少なくとも 3 つの Δ の極大単体の境界に含まれる (またはちょうど 2 つの A の極大単体の境界に含まれる).

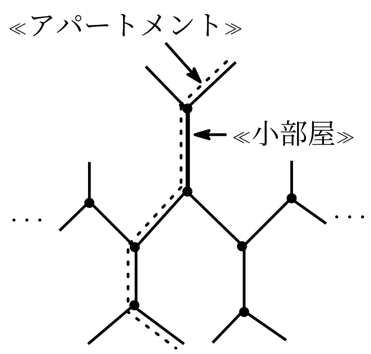
(B4) 任意の Δ の極大単体 C, D に対し, ある $\mathcal{A}$ の元で C, D を共に含むものが存在する.

(B5) Δ の 2 つの単体 σ, σ' が共に $\mathcal{A}$ の元 A, A' の双方に属するとき, A から A' への同型射で σ, σ' の各点を固定するものが存在する.

但し $A \in \mathcal{A}$ の極大単体 C, D が **隣接する** *adjacent* とは, A に於ける C, D の (閉包の) 共通部分が $(r-2)$ 次元単体となることであるとする.

族 $\mathcal{A}$ の元を ≪**アパートメント**≫ *an apartment*, 極大単体を ≪**小部屋**≫ *a chamber* と呼ぶ. また, 公理 (B1) に依り定まる自然数 r を ≪建物≫ $\mathcal{B}$ の **階数** *the rank* という.

例えば ≪樹木≫ は階数 2 の ≪建物≫ である; 実際, 各辺が ≪小部屋≫ であり, 端点を持たない道 (これはユークリッド直線 $\mathbb{R}$ を整数点 $\mathbb{Z}$ で印付けたものと見ることも出来る) が ≪アパートメント≫ となる. ティッツに依る ≪建物≫ の概念は「≪小部屋≫ が連なって ≪アパートメント≫ をなし, ≪アパートメント≫ が集まって ≪建物≫ となる」という, まさに ≪集合住宅≫ のイメージそのものである. 右図に示した ≪樹木≫ の場合の例を良く観察すれば, そのイメージも捉え易かろう[*16].



それでは離散付値体上の特殊線型群 $SL(n)$ に付随するブリュアー-ティッツの ≪建物≫ を導入しよう. 以下では F を離散付値体として, その付値環を $\mathcal{O}$ と表し, さらに一意化元 ϖ を固定する. ブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ の定義を自然に拡張することで, 以下のようにして単体複体 $\mathcal{B}(SL(n)_{/F})$ を構成しよう:

頂点: ベクトル空間 $V_0 := F^{\oplus n}$ の $\mathcal{O}$-格子の相似類 $[L]$ 全体.

[*15] このように極大単体同士を繋ぐような互いに隣接する極大単体の列は ≪**回廊**≫ *a gallery* と呼ばれる.

[*16] 一般に ≪建物≫ の構造は非常に複雑で図示出来ない場合が殆どなので, このようなイメージを養っておくことは肝要である. 実際 $SL(n)$ に付随するブリュアー-ティッツの ≪建物≫ ですら, $n \geq 3$ の場合には ≪アパートメント≫ が高次元のものとなるため, 最早 3 次元ユークリッド空間内では図示することすら儘ならない.

辺: 　頂点 v_1, v_2 は，それぞれの対応する $\mathcal{O}$-格子の相似類の代表元 L_1, L_2 で

$$\varpi L_2 \subset L_1 \subset L_2 \text{ または } \varpi L_1 \subset L_2 \subset L_1$$

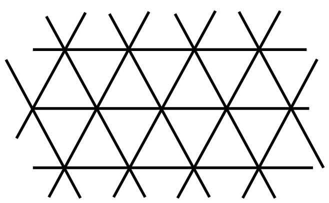
を満たすものが存在するときに隣接すると約束する．

単体: 　互いに隣接しあう $(k+1)$ 個の頂点 (或いは格子の相似類) は k-単体を定義すると定める．

特に頂点 $v_1, \ldots, v_n$ は，対応する $\mathcal{O}$-格子の相似類の代表元 $L_1, \ldots, L_n$ で，(適当にラベル付けを取り替えた後に)

$$\varpi L_n \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_{n-1} \subset L_n$$

を満たすものが存在するときに ≪小部屋≫ (つまり $(n-1)$-単体) を定める．



このとき，$\mathcal{B}(SL(n)_{/F})$ は $(n-1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n-1}$ と同型な ≪アパートメント≫ の族を持ち，$(n-1)$-単体を ≪小部屋≫ とするような階数 $(n-1)$ の ≪建物≫ となる[*17]．≪建物≫ となることは直接確認することも可能であるし，例えばティッツの *BN* **対** *a BN-pair* の一般論を用いて証明することも出来る (詳細は [AB08] 等を参照)．左図は $\mathcal{B}(SL(3)_{/F})$ の ≪アパートメント≫ の様子を図示したものである (ユークリッド平面を正三角形 (2-単体) で埋め尽くしたもの)．また $n=2$ のときには，上の定義はブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ の定義と完全に一致することに注意しよう．

頂点に対応する $\mathcal{O}$-格子の $\mathcal{O}$-基底の変換に依って，$\mathcal{B}(SL(n)_{/F})$ にも自然に $SL_n(F)$ が作用する．この作用は以下の性質 (♮) を持つ; g が或る 単体 σ を固定するならば，その単体 σ の 各点を固定する (即ち $g|_\sigma = \mathrm{id}_\sigma$ が成立)[*18]．また，≪建物≫ の公理 (B2), (B4) 及び各 ≪アパートメント≫ がユークリッド空間と同型であることから $\mathcal{B}(SL(n)_{/F})$ **の可縮性** が従う．本質的三つ又分岐曲面の構成の際に用いられるブリュアー-ティッツの ≪建物≫ の性質はほぼこれで尽くされる．

§ 2.3　高次指標多様体の理想点と ≪建物≫ への作用の非自明性

ブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ の代わりに ≪建物≫ を用いる点を除けば，三つ又分岐曲面の構成は古典的なカラー-シャーレン理論の場合と平行した議論に依り実行される．

$SL(2)$-表現多様体と同様に，$SL_n(\mathbb{C})$-表現 $\rho\colon \pi_1(M) \to SL_n(\mathbb{C})$ のモジュライ空間として $SL(n)$-**表現多様体** *the* $SL(n)$*-representation variety* $R(\pi_1(M))_{SL(n)} := \mathrm{Hom}(\pi_1(M), SL_n(\mathbb{C}))$

[*17] ≪アパートメント≫ がユークリッド空間と同型な ≪建物≫ のことを **ユークリッド型 ≪建物≫** *a Euclidean building* と呼ぶ．

[*18] これは ≪樹木≫ への逆転を含まない作用に対応する性質である．より一般に，$\mathcal{B}(SL(n)_{/F})$ の ≪小部屋≫ の各頂点には適切な方法で $\{1, \ldots, n-1\}$ のラベルを付けることが出来て，$SL_n(F)$ の作用が **ラベル付けを保つ作用** *a type-preserving action* であることが証明出来る．

を定義し，その $SL(n)_{/\mathbb{C}}$-共役作用による幾何学的不変式論商として $SL(n)$-**指標多様体** *the* $SL(n)$*-character variety* $X(\pi_1(M))_{SL(n)}$ を定義する．古典理論の場合と同様に $X(\pi_1(M))_{SL(n)}$ に含まれる曲線 C を採り，自然な射影 $\mathrm{pr}\colon R(\pi_1(M))_{SL(n)} \to X(\pi_1(M))_{SL(n)}$ に関する C の持ち上げを D で表すことにすると，pr は滑らかな射影的モデルの間の正則写像 $\widetilde{\mathrm{pr}|_D}\colon \tilde{D} \to \tilde{C}$ を誘導する．曲線 $\tilde{C}$ の閉点 x の $\tilde{D}$ への持ち上げを y で表すとき，$SL(2)$ の場合と同様にトートロジー的表現 $\rho_{\tilde{D},\mathrm{taut}}\colon \pi_1(M) \to SL_n(K(D)) = SL_n(K_y)$ と y に付随するブリュアー-ティッツの ≪建物≫ $\mathcal{B}_{n,y} = \mathcal{B}(SL(n)_{/K_y})$ に対する $SL_n(K_y)$ の自然な作用の合成として，$\pi_1(M)$ の作用 $\pi_1(M) \curvearrowright \mathcal{B}_{n,y}$ が定まる (ここで $K_y = (K(D), v_y)$ は D の有理関数体 $K(D)$ を y に於ける位数関数 v_y に依り離散付値体と見做(みな)したもの).

カラー-シャーレン理論の基本補題 (補題 1.4) の類似として以下が示される;

補題 2.5 (鍵補題)**.** 曲線 $\tilde{C}$ の閉点 x 及びその $\tilde{D}$ への持ち上げ y に対し，離散付値体 $K_y = (\mathbb{C}(D), v_y)$ に付随するブリュアー-ティッツの ≪建物≫ を $\mathcal{B}_{n,y}$ で表す．基本群 $\pi_1(M)$ の元 γ が $\mathcal{B}_{n,y}$ の或(あ)る頂点を固定するならば，$I_\gamma(x)$ は複素数値をとる (即(すなわ)ち I_γ は x で極を持たない).

証明は補題 1.4 の (2) $\Rightarrow$ (1) と全く同様のトートロジーである．補題 1.4 の (1) $\Rightarrow$ (2) の証明を振り返れば，補題 2.5 の逆の主張は高次表現の場合 (サイズの大きい行列の場合) には全く成り立たないことは容易に想像がつくだろう．古典的カラー-シャーレン理論に於いても，基本群の ≪樹木≫ への作用の非自明性を導くだけであるならば補題 1.4 の (2) $\Rightarrow$ (1) の主張のみで十分であったことを思い出しておこう.

注意 2.6. 勿論(もちろん)補題 1.4 (1) $\Rightarrow$ (2) の主張が重要でないというわけでは全くない．実際，カラー-シャーレン理論のトポロジーへの応用 (スミス予想 SMITH's conjecture の解決等) の局面ではしばしば (1) $\Rightarrow$ (2) の方向の主張が用いられる.

補題 1.4 (1) $\Rightarrow$ (2) 型の主張が高次表現の場合に成立しないことは，我々の結果 [HK13] が古典的なカラー-シャーレン理論の場合と比べてトポロジーの諸問題への直接的な応用への道筋が見出しにくい状況となっている要因の一つであるとも言える.

古典理論の場合と同様にして，補題 2.5 から次の系を得(う)る.

系 2.7. 曲線 $\tilde{C}$ の理想点 $\tilde{x}$ 及びその $\tilde{D}$ への持ち上げ $\tilde{y}$ に対し，$\tilde{y}$ に付随するブリュアー-ティッツの ≪建物≫ $\mathcal{B}_{n,\tilde{y}}$ への $\pi_1(M)$ の作用は非自明である.

尚(なお)，1.3 節では作用の非自明性の証明の際に指標多様体 $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ のアファイン座標環が値写像 I_γ で生成されること (補題 1.2) を用いていたが，高次指標多様体 $X(\pi_1(M))_{SL(n)}$ についても対応する結果がクラウディオ・プロセシ Claudio PROCESI [Proc76] に依り得られていることを注記しておく.

§ 2.4 三つ又分岐曲面の構成

[HK13] の主定理を標語的に簡潔に纏(まと)めると以下のようになる．

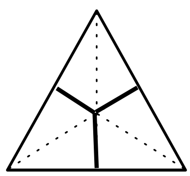
定理 2.8 ([HK13])**.** M をコンパクトで向き付け可能な連結既約 3 次元多様体とし，n を 2 以上の自然数とする．n が 4 以上のときには M が閉多様体でない (即(すなわ)ち境界が空集合でない) ことを仮定する．このとき，M の基本群 $\pi_1(M)$ に対する $SL(n)$-指標多様体 $X(\pi_1(N))_{SL(n)}$ の各理想点 $\tilde{x}$ に付随して，M に含まれる本質的三つ又分岐曲面が構成出来る．

本質的三つ又分岐曲面の構成は 1.1 節の議論と同様の手順で行われる．M の有限単体分割をとり，普遍被覆空間 $\tilde{M}$ の上に $\pi_1(M)$-同変に持ち上げておこう．

第 1 段階. $\pi_1(M)$-同変な単体的写像 $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \mathcal{B}^{(2)}_{n,\tilde{y}}$ の構成.
これは 1.1 節と同様に 0 骨格上で構成した $\pi_1(M)$-同変写像を延長補題 ([Hat02, Lemma 4.7] 参照) と単体複体対の単体近似定理 ([服部 02, 定理 4.3] 参照) を用いて拡張することに依り得られる (延長補題を適用する際に，ブリュアー-ティッツの ≪建物≫ が可縮であることを用いる．以下の 注意 2.9 も参照).

第 2 段階. $\tilde{f}$ は $\pi_1(M)$ での商複体上に 単体的写像 $f\colon M \to \mathcal{B}^{(2)}_{n,\tilde{y}}/\pi_1(M)$ を誘導する (作用の性質 (♯) は商複体 $\mathcal{B}_{n,\tilde{y}}/\pi_1(M)$ が “きちんと定義できる” ことを保障している).

第 3 段階. 商複体 $\mathcal{B}^{(2)}_{n,\tilde{y}}/\pi_1(M)$ の各 2-単体に対して，境界の各辺の中点と重心を結んで出来る図形 (所謂(いわゆる) “Y の字” 型. 右図を参照のこと) を考え，それ等を全て集めたものを E とする．これは，古典理論の場合に考察した商グラフ $\mathcal{T}_{\tilde{y}}/\pi_1(M)$ の各辺の中点を集めた集合 E の類似である.



第 4 段階. E を f で引き戻すと M 内の三つ又分岐曲面 Σ が得られる．あとは Σ が本質的になる様に $\tilde{f}$ を “適切に” 取り替えれば良い (詳細は [HK13] 参照).

図 4 に本質的三つ又分岐曲面の構成の様子を模式的に示した.

注意 2.9. 表現の次元 n が 4 以上のときにはブリュアー-ティッツの ≪建物≫ の階数が 3 以上となるため，第 1 段階で構成した写像 $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \mathcal{B}_{n,\tilde{y}}$ は先天的には $\mathcal{B}_{n,\tilde{y}}$ の 3 **骨格** $\mathcal{B}^{(3)}_{n,\tilde{y}}$ **への射**となってしまう．これを避けるために [HK13] では **脊柱** *the spine* と呼ばれる M の強変位レトラクトとなるような 2 次元部分複体 P をとり，M の P へのレトラクションに対して同様の操作を行うことに拠って $\tilde{f}$ を 2 骨格 $\mathcal{B}^{(2)}_{n,\tilde{y}}$ への射として構成している (境界が空集合でないと言う条件は脊柱の存在を保障するために課されている [Cas65]).

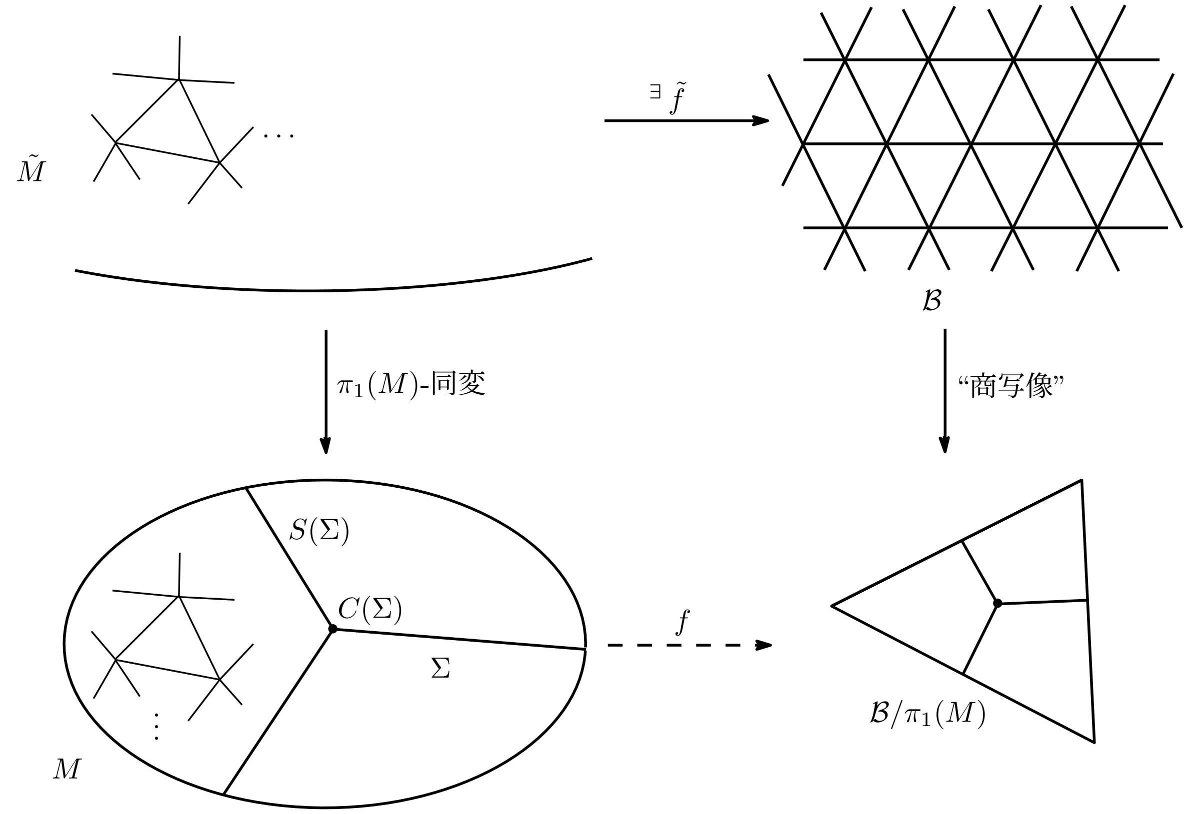


図 4　本質的三つ又分岐曲面の構成 ($n = 3$ の場合の一例)

勿論(もちろん) $\mathcal{B}^{(3)}_{n,\tilde{y}}/\pi_1(M)$ の適当な 2 次元部分複体を考えて f で引き戻すという (M を脊柱にレトラクトするよりは)「自然な」方針をとることでも M の中の "曲面" を構成することは可能であると思われるし，そのようにして得られる曲面がどのようなものかを調べることも大変興味深い課題であろう．

注意 2.10. 3 次元多様体には付随する $SL(2)$-指標多様体 $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の次元が 0 次元であるが，より高次の特殊線型群に対する指標多様体の次元は正となるものが存在する (例えば **小ザイフェルト多様体** *small* SEIFERT MANIFOLDS 等)．斯様(かよう)な多様体のクラスには古典的なカラー-シャーレン理論は適用出来ないが，定理 2.8 に拠り本質的三つ又分岐曲面を構成することは可能である．このことからも，定理 2.8 が (非ハーケン多様体の幾何学を含めた) 低次元トポロジーの諸問題に対して新しいアプローチを提供するであろうことが大いに期待される．

§ 3　数論的位相幾何への応用に向けて

バリー・メイザー Barry MAZUR，森下昌紀 Masanori MORISHITA 等に依って創始された **数論的位相幾何学** *arithmetic topology* は，3 **次元トポロジー** 3-*dimensional topology* と **数論幾何学** *arithmetic geometry* の間に横たわる不思議な理論的類似性を追究する学問であり，現在も

進展が著しい研究分野である．これまで概観してきたように，カラー-シャーレン理論はトポロジーの理論でありながらその実体は非常に代数的な理論に根ざしており，数論的位相幾何学の観点からも非常に興味深い研究対象であることは明らかなように思われる．

本節ではカラー-シャーレン理論の数論的位相幾何学への応用に向けた 2 つのアプローチを紹介する．本節の内容はまだ研究の初期段階であり，また紙面もあまり残されていないので，ここでは非常に簡潔な考察及び展望を紹介する程度に留めざるを得ないことを了承いただきたい．

§ 3.1　指標多様体と普遍変形空間の類似の観点から

数論的位相幾何学の ≪辞書≫ に依ると，3 次元多様体の基本群のモジュライ空間であった指標多様体に対応する数論幾何学的概念はメイザーに依って導入された (剰余ガロワ表現の) **普遍変形空間** *the universal deformation space* に他ならない ([森下 09, 第 11 章 及び 第 12 章] 参照)．特に数論幾何の観点からは **肥田族** *a* Hida *family* や **コールマン族** *a* Coleman *family* といった **保型形式の** p **進族** *p-adic families of modular forms* のなすリジッド解析的曲線 (さらにはその一般化である **アイゲン曲線** *the eigencurve*) が普遍変形空間に含まれる曲線として非常に興味深い研究対象であり，歴史的にも肥田晴三 Haruzo Hida の先駆的な研究以降様々な形で取り扱われてきた．このような保型形式の p 進族のなす曲線に対してカラー-シャーレン理論の類似の構成を試みる事は，数論的位相幾何学の立場で考えると大変興味深い問題である．

一方で保型形式の p 進族のなす曲線は **リジッド解析的な** 曲線であり，代数曲線論のような双有理幾何学的手法 (関数体を変えずに滑らかな射影的モデルをとることなど) は安易に適用出来ないように思われる[*19]．他方ブリュアー-ティッツの理論は離散的とは限らない付値体に対しても或(あ)る程度適用することは出来るため，例えば付値論的な議論から有理数体の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の或(あ)る種のブリュアー-ティッツの ≪建物≫ への非自明な作用が構成出来る可能性は十分にあると思われる．そのようにして得られるであろう絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}}$ の分解と古典的な代数的整数論の手法に依り得られている $G_{\mathbb{Q}}$ の分解を比較検討することも非常に興味深い問題であると考えられる．

§ 3.2　整数環 / 有限体上の理論と伊原の非アーベル類体論

カラー-シャーレン理論では $\mathbb{C}$ 上の代数多様体として表現多様体や指標多様体が導入されたが，表現多様体や指標多様体はより一般に $\mathbb{Z}$ 上のモジュライ・スキームとして構成されている ([Naka00] 参照)．したがって，**整数環係数の表現** や **有限体係数の表現** に対してカラー-シャーレン理論を考察することも大変興味深い問題である (そもそもカラーとシャーレンが $SL_2(\mathbb{C})$-表現を考察した要因の一つとしては，M が双曲多様体の場合に M のモノドロミー表現 $\rho_0\colon \pi_1(M) \to PSL_2(\mathbb{C})$ の “持ち上げ” として自然に $SL_2(\mathbb{C})$-表現が得られ，しかもサーストンの定理に拠り χ_{ρ_0} に対応する点の近傍で $X(\pi_1(M))_{SL(2)}$ の次元が 1 次元となる等，カ

*19 例えば $\mathrm{Spf}\,\mathbb{C}_p[[T]]$ に付随するリジッド解析曲線は半径 1 の開円盤であり，射影直線 $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}$ に埋め込むことは出来るが，その補集合は非常に大きく “有限個の理想点の集合” という状況からはほど遠くなってしまう．

ラー-シャーレン理論の設定に適合した状況が得易かったというトポロジー側の事情が挙げられるように思われる．数論的位相幾何学の観点からカラー-シャーレン理論を再考察するのであれば，余計な係数の制限や表現の次元の制限は取り払って考えるべきであろう)．

この問題に対して森下昌紀さんよりコメントをいただいたので此処に簡単に紹介しよう; 代数関数体に対する伊原康隆 Yasutaka IHARA の**非アーベル類体論** *non-abelian class field theory* は，端的に言えば $PSL_2(\mathbb{Q}_p) \times PSL_2(\mathbb{R})$ の或る稠密な部分群 Γ に対し，その Γ に対する**セルバーグ型ゼータ関数** *the zeta function of* SELBERG *type* と "同じ形の" **ハッセ-ヴェイユ・ゼータ関数** *the* HASSE-WEIL *zeta function* を持つ有限体上の 1 変数関数体が存在し，その関数体の有限次拡大と Γ の位数有限部分群が "然るべき方法で" 対応するということを主張するものであって，特別な場合には伊原康隆自身に依り証明がなされている [Iha68]．その際に登場する伊原のセルバーグ型関数は，或る種のブリュアー-ティッツの ≪樹木≫ の有限商グラフに付随するゼータ関数として捉えることが出来るのであった[*20]．他方，例えば $\mathbb{Z}_p$ の様な剰余体が有限な離散付値体を係数に持つ $SL(2)$-表現に対して，カラー-シャーレンの手法に依り得られる商グラフは有限グラフとなることが期待される．したがって状況としては伊原の非アーベル類体論の設定と非常に似通っていると言えよう．以上の観察を踏まえて，**3 次元多様体の基本群に対して伊原の非アーベル類体論の類似が辿れないだろうか？** というのが森下さんに依る問題提起である．

森下さんの問題も含め，一般の係数体に対するカラー-シャーレン理論とグラフのゼータ関数に纏わる話題はまだまだ非常に多くの興味深い問題を秘めているように思われる．現在この方面の研究も (部分的に北山さんと共同で) 引き続き進行中であるので，また機会を改めて紹介出来ればと思う．

■ **謝辞**　トポロジーの話題にかなり偏った内容であったにも拘らず，早稲田整数論研究集会という 20 年の歴史を誇る伝統ある研究集会で講演する貴重な機会を与えて下さった研究代表者の皆様，著者に本研究集会での講演を薦めて下さり，さらに準備段階に係る連絡伝達を一手に担って下さった早稲田大学の森澤貴之さん[*21]，報告書執筆に係る事務連絡を担当され，著者の数々の無理難題に快く応えて下さった早稲田大学の兵藤史武さん，並びに大変充実した集会期間中，舞台裏で運営実務全般に御尽力くださった早稲田大学の学生の皆様に心より感謝申し上げます．また，集会中に伊原理論に纏わる大変有意義なコメントをいただいた九州大学の森下昌紀教授に厚く御礼申し上げます．

参考文献

[北山 13] 北山貴裕, *Torsion functions on character varieties and an extension of Culler-Shalen theory*, 日本数学会 2013 年度年会 トポロジー分科会アブストラクト (2013).

[*20] 有限グラフに付随するゼータ関数を **伊原のゼータ関数** IHARA*'s zeta function* と呼ぶ今日の慣習はこの事実から派生したものであると考えられる．

[*21] 2013 年 4 月より慶應義塾大学.

[服部 02] 服部晶夫，**位相幾何学**，岩波基礎数学選書，岩波書店 (2002).

[森下 09] 森下昌紀，**結び目と素数**, シュプリンガー現代数学シリーズ 第 15 巻，シュプリンガー・ジャパン (2009).

[AGM12] I. Agol, D. Groves and J. Manning, *The virtual Haken conjecture*, preprint, `arXiv:1204.2810 [math.GT]` (2012).

[AB08] P. Abramenko and K. S. Brown, *Buildings*: *Theory and Applications*, Springer, New York (2008).

[BT72] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local*: I. *Données radicielles valuées*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., tome 41 (1972), 5–251.

[Cas65] B. G. Casler, *An imbedding theorem for connected* 3*-manifolds with boundary*, Proc. Amer. Math. Soc., **16** (1965), 559–566.

[CS83] M. Culler and P. B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of* 3*-manifolds*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 1, 109–146.

[Ep61] D. B. A. Epstein, *Free products with amalgamation and* 3*-manifolds*, Proc. A. M. S., **12** (1961), 669–670.

[Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, 2002.

[HK13] T. Hara and T. Kitayama, *Character varieties of higher dimensional representations and splittings of* 3*-manifolds*, preprint in preparation (2013).

[Iha68] Y. Ihara, *Non-abelian classfields over function fields in special cases*, Congres Intern. Math., 1970, 381–389

[Mum76] D. Mumford, *Algebraic Geometry* I: *Complex Projective Varieties*, Grundlehren der Math. Wiss., **221**, Springer-Verlag, 1976.

[Naka00] K. Nakamoto, *Representation varieties and character varieties*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **36** (2000), 159–189.

[Proc76] C. Procesi, *The invariant theory of* $n \times n$ *matrices*, Advances in Math., **19**, no. 3 (1976), 306–381.

[Ser77] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,* $SL(2)$, Astérisque, vol. **46**, SMF, Paris, 1977. [English translation: J.-P. Serre, *Trees* (translated by John Stillwell), Springer-Verlag, 1980]

[Sh02] P. B. Shalen, *Representations of* 3*-manifold groups*, in: *Handbook of Geometric Topology*, Elsevier Science Ltd. (2002), 955–1044.

[St59] J. R. Stallings, *Some topological proofs and extensions of Grushko's theorem*, Ph. D. dessertation at Princeton University (1959)

[St71] J. R. Stallings, *Group Theory and Three-Dimensional Manifolds*, Yale Math. Monographs, **4**, Yale Univ. Press (1971)

[Wald67] F. Waldhausen, *Gruppen mit Zentrum und* 3*-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, Topology, **6** (1967), 505–517.